

# ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-RALEIGH, USA. · G. HEINRICH-WIEN  
A. KROMM-GRAZ · E. MELAN-WIEN · K. OSWATITSCH-WIEN  
H. PARKUS-WIEN

SCHRIFTLEITUNG

H. PARKUS-WIEN

BAND XV

MIT 109 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN IM MÄRZ 1961)

ERNST MELAN ZUM 70. GEBURTSTAG



WIEN  
SPRINGER-VERLAG  
1961



Das

## Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 25 bis 30 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)  
Wien I, Mülkerbastei 5

zu senden, alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien I, Mülkerbastei 5  
Tel. 63 96 14, Telegrammadresse: Springerbuch Wien

Die Manuskripte können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung möglichst in mindestens einer dieser drei Sprachen vorangestellt werden, die vom Verfasser, und zwar in einem Höchstumfang von acht Schreibmaschinenzeilen, mitzuliefern ist.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben.

Autorkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10% der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind: der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beiliegenden Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Der Verlag

Band XV,

## Inhaltsverzeichnis

Seite

### Originalarbeiten

Ernst Melan zum 70. Geburtstag. <i>H. Parkus</i> (Mit 1 Textabbildung) .....	1
<b>H. H. Bleich</b> , Approximate Determination of the Frequencies of Ring Stiffened Cylindrical Shells. (With 16 Figures) .....	6
<b>F. Chmelka</b> , Beseitigung von Restspannungen in Fachwerken durch Belastung .....	25
<b>E. Czitary</b> , Über die Schwingungen des Zugseiles von Seilschwebbahnen. (Mit 17 Textabbildungen) .....	34
<b>K. Federhofer</b> , Die gleichmäßig belastete dünne Kreisringplatte mit großer Ausbiegung. (Mit 5 Textabbildungen) .....	53
<b>L. Föppl</b> , Der elastische Spannungszustand in einer durch eine Parabel begrenzten ebenen Scheibe infolge Einzellast im Kerbgrund. (Mit 2 Textabbildungen) .....	70
<b>W. F. Gauster</b> , Magnetic Field Design in Thermonuclear Research. (With 15 Figures) ...	76
<b>G. Heinrich und K. Desoyer</b> , Theorie einer Versuchsanordnung zur Messung der Werkstoffdämpfung. (Mit 7 Textabbildungen) .....	88
<b>Z. Kaczowski</b> , Stabilität und Eigenschwingungen einer Platte von der Form eines regelmäßigen Polygons. (Mit 2 Textabbildungen) .....	103
<b>C. F. Kollbrunner</b> , Der moderne Stahlhochbau und das Feuer. (Mit 3 Textabbildungen) ...	109
<b>W. Nowacki</b> , Ausbreitung der Wärmespannungen in viskoelastischen Körpern. ....	115
<b>W. Olszak und J. Rychlewski</b> , Nichthomogenitäts-Probleme im elastischen und vorplastischen Bereich. (Mit 5 Textabbildungen) .....	130
<b>W. Prager</b> , Linearization in Visco-Plasticity .....	152
<b>F. Reinhitzhuber</b> , Die Berechnung des Vollstreifens (Plattenstreifens) mit regelmäßig sich wiederholenden Verstärkungen. (Mit 3 Textabbildungen) .....	157
<b>E. Reissner</b> , On finite pure bending of cylindrical tubes. (With 1 Figure) .....	165
<b>M. Roš und A. Eichinger</b> , Entwicklung auf dem Gebiete der Armierungsstähle. Bewertung des Sicherheitsgrades .....	172



11279



### Ernst Melan zum 70. Geburtstag

Als die Herausgeber dieser Zeitschrift vor etwa Jahresfrist den Plan faßten, Herrn Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Ernst Melan, Ordinarius für Baustatik und Baukonstruktionen an der Technischen Hochschule Wien an seinem 70. Geburtstag durch die Überreichung einer Festschrift des Österreichischen Ingenieur-Archivs zu ehren und nun an die Fachkollegen des Jubilars mit der Bitte herantraten, sich mit einem Beitrag an dieser Festschrift zu beteiligen, da fanden sie überall begeisterte Zustimmung. Die eingelangten Arbeiten, die hiermit vorgelegt werden, füllen einen vollständigen Band dieser Zeitschrift. Sie zeigen, welche Wertschätzung Prof. Melan in der Welt entgegengebracht wird und welche Anerkennung sein Wirken als Forscher und Lehrer gefunden hat.

Melan wurde am 16. November 1890 in Brünn als Sohn des berühmten Brückenbauers und Baustatikers Josef Melan geboren. Er verbrachte seine Jugendjahre in Prag, wo er das Deutsche Staatsgymnasium absolvierte und 1908 die Deutsche Technische Hochschule bezog. Dort legte er die Staatsprüfung aus dem Bauingenieurfache ab und promovierte 1917 mit einer Arbeit über die Torsion von Umdrehungskörpern zum Doktor der technischen Wissenschaften.



In den an das Studium anschließenden Jahren, von 1916 bis 1918, war Melan bei der k. k. Statthalterei in Graz tätig. Nach dem Zusammenbruch der Monarchie trat er zunächst als Statiker bei der Brückenbauanstalt Waagner-Biró A. G. ein. Er blieb bis zum Jahre 1920 und arbeitete anschließend als Betriebsingenieur im Festigkeitslaboratorium der Technischen Hochschule Berlin-Charlottenburg unter Prof. Dr. E. Meyer. 1921 kehrte er zu Waagner-Biró zurück, wo er als Abteilungsleiter bis 1923 wirkte.

Im Jahre 1922 habilitierte sich Melan an der Technischen Hochschule Wien für das Lehrgebiet Elastizitätstheorie. Schon das nächste Jahr brachte ihm die Berufung an die Deutsche Technische Hochschule in Prag als a. o. Professor für Baustatik und Festigkeitslehre. Er blieb aber nur zwei Jahre an seiner neuen Wirkungsstätte, dann holte ihn Wien zurück. Er wurde Ordinarius für Baustatik an der Technischen Hochschule. Seine Lehrverpflichtung wurde 1939 auf Baustatik und Baukonstruktionen des Stahl- und Holzbaues erweitert. Diesen Lehrstuhl hat Prof. Melan noch heute inne.

In den Studienjahren 1946/47 und 1947/48 bekleidete Prof. Melan das Amt des Dekans der Fakultät für Bauingenieurwesen. Im Studienjahre 1952/53 stand er als Rektor an der Spitze der Hochschule.

Das wissenschaftliche Werk Melans ist außerordentlich umfangreich und durch eine Fülle origineller Gedanken gekennzeichnet. Es kann im wesentlichen in drei Gruppen unterteilt werden: Baustatik, Elastizitätstheorie und Plastizitätstheorie. Daneben finden sich noch Abhandlungen über konstruktive und wirtschaftliche Probleme des Stahl- und Holzbaues.

Unter den baustatischen Arbeiten sind vor allem diejenigen von besonderer Bedeutung, die sich mit der Anwendung der Differenzenrechnung auf baustatische Probleme befassen. Die intensive Beschäftigung Melans mit diesem Fragenkreis fand schließlich ihren Niederschlag in einem gemeinsam mit F. Bleich verfaßten Buch „Die gewöhnlichen und partiellen Differenzgleichungen der Baustatik“. Dem Problem der Auflösung von Gleichungssystemen wandte Melan ebenfalls besondere Aufmerksamkeit zu. Es ist bedauerlich, daß die von ihm vorgeschlagene Vereinfachung des Cross-Verfahrens, die eine bedeutende Arbeitersparnis mit sich bringt, nur einem verhältnismäßig engen Kreis bekannt wurde. Ein weiteres Gebiet, zu dem Melan wesentliche Beiträge geleistet hat, ist die Berechnung von Trägerrosten. Hier ist vor allem das von ihm zusammen mit R. Schindler geschriebene Buch „Die genaue Berechnung von Trägerrosten“ zu nennen. Andere Arbeiten beziehen sich auf Probleme der Stabknickung. Melan hat hier auf die Möglichkeit der Verwendung von Integralgleichungen zur näherungsweisen Bestimmung von Eigenwerten besonders hingewiesen.

Von den elastizitätstheoretischen Abhandlungen Melans seien zuerst die genannt, in denen er sich mit dem Problem der Singularitäten beim Angriff von Einzelkräften im Inneren von Scheiben auseinandersetzt. Mit der Frage der Weiterleitung des Druckes durch eine elastische Schicht hindurch auf eine starre Unterlage hat er sich in zwei frühen Arbeiten beschäftigt. In der Abhandlung „Ein rotationssymmetrischer Spannungs- und Verzerrungszustand einer gelochten Scheibe bei nichtlinearem Spannungs- Dehnungsgesetz“ greift Melan, einem Gedankengang von Prager und Hohenemser folgend, ein nichtlineares Problem auf und führt es bis zur Lösung. In den letzten Jahren hat sich Melan besonders dem Studium von Problemen der Thermoelastizität zugewandt. Wieder war ein Buch, das er gemeinsam mit dem Unterzeichneten verfaßte, das Ergebnis dieser Forschungen.



Die Arbeiten Melans zur Plastizitätstheorie sind erst in den letzten Jahren in ihrer vollen Bedeutung erkannt worden. So blieb zum Beispiel die grundlegende Abhandlung „Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums“ sowie eine Reihe anderer Veröffentlichungen, in denen Melan schon 1937/38 das fundamentale „Anpassungstheorem“ (shakedown theorem) allgemein formulierte und bewies, fast 20 Jahre lang unbeachtet. Es mag dies zum Teil damit zusammenhängen, daß der Melansche Beweis weitgehend Gebrauch von der Theorie der Integralgleichung macht und daher in Ingenieurkreisen nicht leicht verstanden werden konnte.

Die von Witz und Temperament getragenen Vorlesungen Melans erfreuen sich bei den Studenten großer Beliebtheit. Sie sind zum Teil in Buchform erschienen. In erster Linie wäre hier die „Einführung in die Baustatik“ zu nennen, die sich von vielen anderen Werken über das gleiche Gebiet vor allem durch den exakten Aufbau unterscheidet. Besondere Verbreitung und Beliebtheit benützen auch die beiden gemeinsam mit F. Chmelka verfaßten Bände „Einführung in die Statik“ und „Einführung in die Festigkeitslehre“, die in wenigen Jahren zahlreiche Auflagen erleben konnten.

Die wissenschaftlichen Arbeiten Melans fanden ihre Anerkennung durch seine 1943 erfolgte Ernennung zum korrespondierenden Mitglied der Deutschen Akademie der Wissenschaften in Prag, durch die 1945 erfolgte Wahl zum wirklichen Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Wien und schließlich, im Herbst 1960, durch die Ernennung zum Mitglied der polnischen Akademie der Wissenschaften in Warschau. Im Jahre 1959 verlieh ihm die Republik Österreich das Österreichische Ehrenzeichen für Wissenschaft und Kunst. Besondere Freude bereitete Melan die erst vor wenigen Wochen erfolgte Ernennung zum Ehrenmitglied der Schweizerischen Gesellschaft für Forschung und Konstruktion im Stahlbau.

Neben seiner intensiven wissenschaftlichen Arbeit übt Melan noch eine umfangreiche praktische Tätigkeit als Ingenieurkonsulent aus. Sie umfaßt alle Zweige des Industriestahlbaues und des Ingenieurholzbaues. Viele seiner wissenschaftlichen Arbeiten gehen auf dabei empfangene Anregungen zurück.

Seine Fachkollegen, seine Freunde und seine Schüler in aller Welt bringen ihm mit dem vorliegenden Festband ihre aufrichtigen Glückwünsche dar.

H. Parkus

## Originalarbeiten

### a) Bücher

1. Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik. (Gemeinsam mit F. Bleich.) Berlin und Wien: Springer-Verlag. 1927.
2. Die genaue Berechnung von Trägerrosten. (Gemeinsam mit R. Schindler.) Wien: Springer-Verlag: 1942.
3. Einführung in die Statik. (Gemeinsam mit F. Chmelka.) Wien: Springer-Verlag. 6. Aufl. 1954.
4. Einführung in die Festigkeitslehre. (Gemeinsam mit F. Chmelka.) Wien: Springer-Verlag. 4. Aufl. 1959.
5. Einführung in die Baustatik. Wien: Springer-Verlag. 1950.
6. Der Brückenbau (als Herausgeber). 8. Bd.: Massivbrücken von Fritsche. 1948; 3. Bd.: Stahlbrücken von Hartmann. 1950. Wien: F. Deuticke.
7. Wärmespannungen. (Gemeinsam mit H. Parkus.) Wien: Springer-Verlag. 1953.



## b) Abhandlungen

8. Die Verteilung des Druckes durch eine elastische Schichte. Österr. Wochenschrift f. d. öffentl. Baudienst. **24**, 394 (1918).
9. Die Druckverteilung durch eine elastische Schicht. Beton und Eisen. **18**, 83 (1919).
10. Ein Beitrag zur Auflösung linearer Differenzgleichungen mit beliebiger Störungsfunktion. Der Eisenbau. **11**, 88 (1920).
11. Ein Beitrag zur Torsion von Rotationskörpern. Technische Blätter Teplitz-Schönau. **1** (1920).
12. Die Berechnung der Stockwerkrahmen mit beliebiger Felderanzahl. Beton und Eisen. **19**, 230 (1920).
13. Die Durchbiegung einer exzentrisch durch eine Einzellast belasteten Kreisplatte. Der Eisenbau. **11**, 190 (1920).
14. Die Berechnung des Windverbandes einer Hängebrücke. Der Brückenbau. **10**, 115 (1921).
15. Die Berechnung von Flachmasten unter Berücksichtigung der Knickgefahr senkrecht zur Kraftebene. Elektrotechnische Zeitschrift. **42**, 1197 (1921).
16. Zur Berechnung rostförmiger Tragwerke mit Hilfe partieller Differenzgleichungen. Ingenieur-Zeitschrift Teplitz-Schönau. **3**, 247 (1923).
17. Über Nebenspannungen im Fahrbahngerippe eiserner Brücken. Josef Melan-Festschrift. Wien: Franz Deuticke. 1923, S. 191.
18. Die Verteilung der Kraft in einem Streifen von endlicher Breite. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. **5**, 314 (1925).
19. Ein Beitrag zur Berechnung der Einflußlinien statisch unbestimmter Systeme. Die Bautechnik. **7**, 520 (1929).
20. Über die Stabilität von Stäben, welche aus einem mit Randwinkeln verstärkten Blech bestehen. Bericht d. Kongresses f. angew. Math. u. Mechanik. Stockholm 1930.
21. Das Großfeuer in dem Stahlskelettbau des Warenhauses „ARA“ in Prag. Der Bauingenieur. **12**, 498 (1931).
22. Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. Ingenieur-Archiv. **3**, 123 (1932).
23. Der Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im Innern beanspruchten Halbscheibe. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. **12**, 343 (1932).
24. Die Bestimmung des Sicherheitsgrades einfach statisch unbestimmter Fachwerke. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. **12**, 129 (1932).
25. Zur Berechnung von Flachmasten auf Knickung aus der Tragwandebene. Elektrotechnische Zeitschrift. **55**, 318 (1934).
26. Zur Frage einer Qualitätseinteilung des Bauholzes. Der Holzmarkt Wien. **3** (1935).
27. Die Normung des Holzes und seiner Erzeugnisse. Sparwirtschaft. 161 (1935).
28. Theorie statisch unbestimmter Systeme. Int. Vereinigung f. Brückenbau und Hochbau. Vorbericht f. d. 2. Kongreß. **45** (1936).
29. Baustoff mit linearem Verfestigungsbereich. Int. Vereinigung f. Brückenbau u. Hochbau. Vorbericht f. d. 2. Kongreß. **18** (1936).
30. The Application of Theories of Elasticity and Plasticity to Foundation Problems (Discussion). Journal of the Boston Society of Civil Engineers. **23**, 317 (1936).
31. Theorie statisch unbestimmter Systeme aus idealplastischem Baustoff. Sitzungsberichte d. Österr. Akademie der Wissenschaften. **145**, 195 (1936).
32. Anwendung linearer Integralgleichungen auf Probleme der Statik. (Gemeinsam mit L. Holzer.) Annali di Matematica. **16**, 263 (1937).
33. Der Spannungszustand eines „Mises-Hencky'schen“ Kontinuums bei veränderlicher Belastung. Sitzungsberichte der Österr. Akademie der Wissenschaften. **147**, 73 (1938).
34. Versuche mit innerlich statisch unbestimmten Fachwerken. Diskussion. Der Bauingenieur. **19**, 488 (1938).
35. Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums. Ingenieur-Archiv. **9**, 116 (1938).
36. Berechnung und Konstruktion hölzerner Bogenbinder. Holztagung Berlin. (1938.)
37. Zur Frage einheitlicher Bezeichnungen in der Baustatik. Der Stahlbau. **12**, 85 (1939).
38. Die Berechnung gekrümmter Blechträgerbrücken. Der Stahlbau. **13**, 121 (1940).



39. Die genaue Berechnung von Rosttragwerken. Sitzungsberichte der Österr. Akademie der Wissenschaften. **149**, 1 (1940).
40. Eine einfache Näherungsformel zur Berechnung gedrückter Rahmenstäbe. Der Stahlbau. **15**, 81 (1942).
41. Ein Beitrag zur Auflösung linearer Gleichungssysteme mit positiv definiter Matrix mittels Iteration. Sitzungsberichte der Österr. Akademie der Wissenschaften. **151**, 249 (1942).
42. Ein Näherungsverfahren zur Lösung von Eigenwertproblemen. Der Stahlbau. **17**, 12 (1944).
43. Ein rotationssymmetrischer Spannungs- und Verzerrungszustand einer gelochten Scheibe bei nichtlinearem Spannungs-Dehnungsgesetz. Österr. Ingenieur-Archiv. **1**, 14 (1946).
44. Die Normung in Österreich. Zeitschrift d. Österr. Ingenieur- u. Architekten Vereines. **91**, 33 (1946).
45. Eine Vereinfachung der Methode von Cross. Österr. Bauzeitschrift. **2**, 1 (1947).
46. Ein Konvergenzbeweis des Näherungsverfahrens von Cross zur Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Systeme. Anzeiger d. Österr. Akademie der Wissenschaften. **84**, 15 (1947).
47. Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Stützenmomente des Durchlaufträgers. Schweizerische Bauzeitung. **67**, 409 (1949).
48. Wärmespannungen in Scheiben. Anzeiger der Österr. Akademie der Wissenschaften. **86**, 285 (1949).
49. Wärmespannungen in Scheiben. Ingenieur-Archiv. **4**, 154 (1950).
50. Spannungen in Decken mit Strahlungsheizung. Abhandlungen der Intern. Vereinigung f. Brückenbau und Hochbau. **11**, 337 (1951).
51. Temperaturverteilungen ohne Wärmespannungen. Österr. Ingenieur-Archiv. **6**, 1 (1951).
52. Wärmespannungen in einer Scheibe infolge einer wandernden Wärmequelle. Ingenieur-Archiv. **20**, 46 (1952).
53. Wärmespannungen in Scheiben mit Wärmeabgabe an den Oberflächen. Österr. Bauzeitschrift. **8**, 89 (1953).
54. Prof. Dr. Ing. A. L. Nadai zum 70. Geburtstag. Österr. Ingenieur-Archiv. **7**, 1 (1953).
55. Der Holzbau in Österreich. Deutsche Bauzeitschrift. 678 (1954).
56. Wärmespannungen infolge quasi-stationärer Temperaturverteilung. Anzeiger d. Österr. Akad. d. Wissenschaften. **91**, 183 (1954).
57. Ein wirtschaftliches Problem des Holzbaues. Holz-Zentralblatt. **80**, 1371 (1954).
58. Die Analogie zwischen Leitungsnetzen und Fachwerken. Elektrotechnik und Maschinenbau. **71**, 569 (1954).
59. Wärmespannungen in einem kreisrunden Behälter infolge warmen Füllgutes. Österr. Bauzeitschrift. **9**, 81 (1954).
60. Wärmespannungen infolge eines rotierenden Temperaturfeldes. Österr. Ingenieur-Archiv. **8**, 165 (1954).
61. Wärmespannungen bei der Abkühlung einer Kugel. Anzeiger d. Österr. Akad. d. Wissenschaften. **92**, 202 (1955).
62. Spannungen infolge nicht stationärer Wärmefelder. Österr. Ingenieur-Archiv. **9**, 171 (1955).
63. Wärmespannungen bei der Abkühlung einer Kugel. Acta Physica Austriaca. **10**, 81 (1956).
64. Die Antennenmaste der neuen Mittelwellen-Sendeanlage Bisamberg. Elektrotechnik und Maschinenbau. **77**, 236 (1960).
65. Die genaue Berechnung mehrfach in ihrer Höhe abgespannter Maste. Der Bauingenieur. **35**, 416 (1960).



# Approximate Determination of the Frequencies of Ring Stiffened Cylindrical Shells

By H. H. Bleich, New York

With 16 Figures

**Summary.** An approximate theory is presented which permits the determination of the fundamental frequencies of ring stiffened cylindrical shells of finite or infinite length. The method is also applicable to shells of infinite length in a fluid.

The theory is confirmed by comparison with an available refined theory for shells of infinite length, and with experimental frequencies for finite shells.

## Introduction

This paper presents an approximate method for the determination of the frequencies of free vibrations of thin cylindrical shells stiffened by circular stiffening rings.

While the exact solution for the vibrations of a system consisting of numerous rings and connecting pieces of cylindrical shells can be formulated without difficulty, the solution of the resulting group of simultaneous differential equations would be very complicated. The great difficulty lies not so much in the large number of these equations, but in the fact that the differential equations of the shell are of the eighth order, requiring the solution of an eighth-order characteristic equation (actually reducible to a bi-quadratic). Except for one special, and relatively simple case, Ref. 1, the actual solution of the differential equation of motion of a shell has never been attempted in any case requiring all the roots of the characteristic equation.

For engineering purposes simpler methods than the actual solution of the differential equations, even if less exact, are desired and are derived in the following. If one has enough understanding of a vibration problem to select an "appropriate" shape for the modes, Rayleigh's method is always available to find the frequencies in a simple manner; the vital point of this paper is the fact that within a certain range of frequencies a simple but very good approximation for the shape of the modes exists. Simple approximations for the equivalent static case have been known for many years to designers of concrete shell roofs; the resulting elementary formula for the effective width of a shell, has, however, found its way into print only relatively recently, Ref. 2, pp. 171—174.

The crucial detail concerning the shape of the modes on which the method presented is based is the deformation of the shell between the stiffening rings. In the static case, discussed in Sec. I as basis for the dynamic case, it can be shown that deformations of the generators of the shell between the stiffening rings can be determined approximately from the circular symmetric case (within certain limitations). This permits the determination of stresses and deflections by replacing the stiffened shell by a system of rings each of which has a cross section consisting of the actual ring section and of added flanges representing the "effective" part of the shell. In Sec. II this concept is applied to the vibrations of stiffened infinite shells using Rayleigh's method. It is found that the frequency of a shell will be that of a ring having the "effective" cross



section used in the static case; however, this ring must be deemed to have a fictional "equivalent mass". The recognition of the necessity for the introduction of this equivalent mass is a vital point of the method.

Section III, IV and V carry the approach further, permitting the determination of the frequencies of finite shells, including the case of open ends, i. e. of shells supported by end rings. Section VI finally contains a comparison with the results of the analysis Ref. 1, and a comparison with an available experiment. It is seen that the proposed method, while of extreme numerical simplicity, gives in the range of its validity results which can be expected to contain an error of less than 10%.

By using the concept of virtual mass, discussed for this case in Ref. 3, the method can also be applied to shells submerged in a fluid.

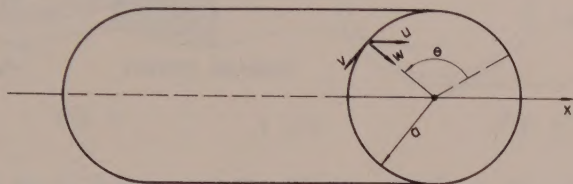


Fig. 1.

### List of Major Symbols

$x, \theta$	coordinates
$u, v, w$	longitudinal, tangential and radial components of displacement, respectively (positive directions defined in Fig. 1).
$\omega$	circular frequency
$a$	mean radius of shell
$\bar{a}$	radius of stiffening ring (to centroid)
$b$	effective width
$B$	as subscript refers to end rings
$c = \bar{a} - a$	distance of centroid of intermediate ring from shell, Fig. 7
$\bar{c}$	same as $c$ , but for end ring, Fig. 14
$h$	thickness of shell
$I$	moment of inertia of ring stiffener incl. effective part of shell
$I$	as subscript refers to intermediate stiffening rings
$l$	spacing of intermediate stiffening ring
$L$	total length of finite shell
$n$	in $\sin n\theta$ , $\cos n\theta$ defines number of circumferential waves
$m$	mass per unit of area or unit of length, as applicable
$\alpha$	coefficient, Eqs. (2-12, 12a, 12b)
$\bar{\alpha}$	coefficient, Eq. (4-6)
Other symbols are defined as they occur.	

### I. The Effective Width Concept for Static Loads

If a stiffened cylindrical shell is subjected to a system of static loads which are repetitious with the period  $l$  in the axial direction of the shell, the distribution of the circumferential membrane stresses  $\sigma_\theta$  in the shell will also be periodic. Figure 2 shows



a typical stress distribution in a longitudinal section for such a case. For the purpose of computing the largest stress  $\sigma_{\max}$  one can replace each ring and the adjoining shell of total width  $l$  by a fictional "effective section" consisting of the ring cross-section itself and two flanges on either side having an "effective width"  $b$ , Fig. 2. The effective

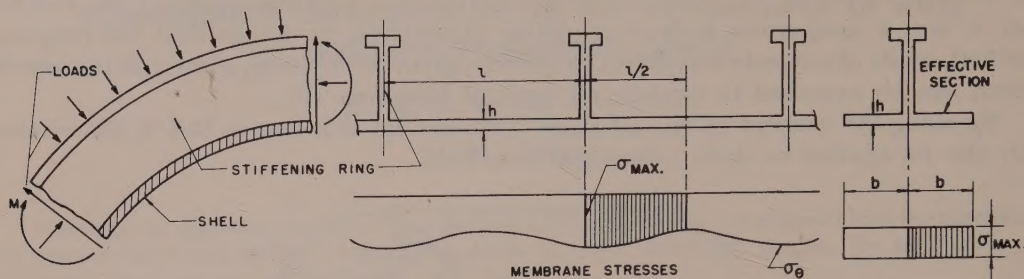


Fig. 2.

width  $b$  is defined by the requirement that the resultant of all stresses  $\sigma_{\theta}$  over the distance  $l/2$ , Fig. 2, is equal to the resultant  $bh\sigma_{\max}$  of the stresses in the flanges of the effective section,

$$b = \frac{1}{\sigma_{\max}} \int_0^{l/2} \sigma_{\theta} dx. \quad (1-1)$$

Introduction of the concept of the effective width  $b$  is useful in the solution of this problem because the value of  $b$  can be determined with relative ease. The effective width  $b$  depends not only on the shell dimensions but also on the loading, and will further be a function of the location  $\theta$  of the section considered. This complicated situation becomes simpler if the loads act on the stiffening rings only and are sinusoidally distributed over the circumference,  $p(x, \theta) = p(x) \cos n\theta$ , such that the stresses  $\sigma_{\theta}$  are proportional to  $\cos n\theta$ ; in such a case the effective width is independent of the location  $\theta$ , and remains only a function of the shell dimensions and of the number  $n$ . Extensive tables for the effective width are available for  $n \geq 2^*$ , Ref. 4. When comparing the values of  $b$  for different  $n$  for thin shells and not too large  $n$  (say up to  $n = 6$ ), it is seen that the values differ little (less than 10%) from the value for  $n = 0$ , which is for steel ( $\nu = 0.3$ )

$$b \simeq 0.74 \sqrt{ah} \quad (1-2)$$

valid if  $b < l/2$ .

In view of the intended approach to the dynamic case it is necessary to present the details of the derivation of Eq. (1-2). Consider the junction of the shell and stiffening ring, Fig. 3, for an infinitely long shell having one stiffener only. For the case of circular symmetry,  $n = 0$ , the radial deflection of the ring  $w_I$  will be independent of  $\theta$ , while the radial deflection  $w$  of the shell will be a function of  $x$  only. Separating the semi-infinite shell portion to the right there will be bending moments  $M$  and radial forces  $N$  on the face of shell Fig. 4. At the point of junction the strain (positive if tensile) in the stiffener,  $\epsilon_I = -w_I/a$ , must equal the tangential strain in the shell,  $\epsilon(0) = -w(0)/a$ . Let the system of forces acting on the stiffener produce certain strains  $\epsilon_I = \epsilon(0)$ ; the shell

\* For static loads the case  $n = 1$  is a degenerate one, while the solution for  $n = 0$  is elementary.



deflection at  $x = 0$  will be  $w(0) = -a \varepsilon_I$ , and because of symmetry  $w'(0) = 0$ . Using these two conditions as boundary conditions one can solve the differential equation of the shell\* obtaining

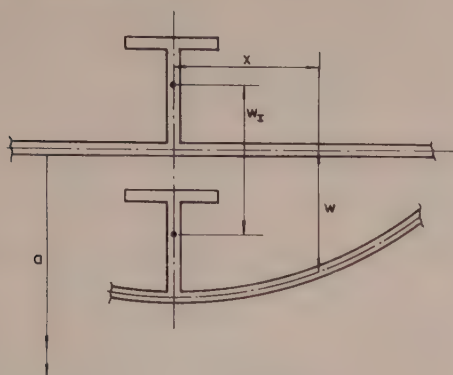


Fig. 3.

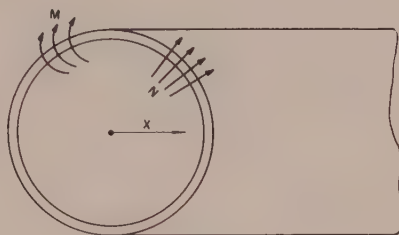


Fig. 4.

$$w(x) = -a \varepsilon_I \Phi(x) = w_I \Phi(x) \quad (1-3)$$

where

$$\Phi(x) = e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \quad (1-4)$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{a^2 h^2}} \simeq \frac{1,36}{\sqrt{ah}}.$$

A relationship similar to Eq. (1-3) applies for the circumferential stress

$$\sigma_\theta(x) = \sigma_I \Phi(x) \quad (1-5)$$

where  $\sigma_I = E \varepsilon_I$  is the stress in the stiffening ring. Substituting in Eq. (1-1) and noting that  $l = \infty$ , gives

$$b = \frac{1}{\sigma_I} \int_0^\infty \sigma_I \Phi(x) dx = \frac{1}{\beta} = 0,74 \sqrt{ah}. \quad (1-6)$$

In case of an infinite number of stiffeners it is in general necessary to solve the analogous problem for the shell of finite length  $l$ . However, if  $l > 2 \sqrt{ah}$  there is very little interaction between the two edges  $x = 0$  and  $x = l$  because the function  $\Phi(x)$  is very small if  $\beta x > 2$ . The result Eq. (1-6) is therefore approximately applicable to closely stiffened shells, provided\*\*  $l > 2 \sqrt{ah}$ . The corresponding deflection of the shell is shown in Fig. 5. It is seen that the deflection  $w(x)$  is largest at the stiffeners and decreases away from the stiffeners approaching  $w(x) \simeq 0$  if the spacing  $l$  is large. The deflection  $w$  of the shell may be expressed by the deflection  $w_I$  of the stiffener and a relative deflection  $\Delta w$  between shell and stiffener:

$$w(x) = w_I - \Delta w(x) \quad (1-7)$$

where the relative deflection depends on the strain  $\varepsilon_I$  in the stiffeners,

\* S. Timoshenko, Strength of Materials, Vol. 2, p. 166 and pp. 4, 5.

\*\* Cases  $l > 2 \sqrt{ah}$  have little interest because the effective width  $b$  would be nearly equal to  $l/2$  and the study would be entirely unnecessary.



$$\Delta w(x) = -a\varepsilon_I [1 - \Phi(x)] \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}. \quad (1-8)$$

Because the stresses  $\sigma$  and displacements  $\Delta w$  are significant only for points where the distance  $x$  is not large (compared to the effective width  $b$ ) one can reason that the analysis for the case  $n = 0$  is applicable approximately for any loading or displacement,

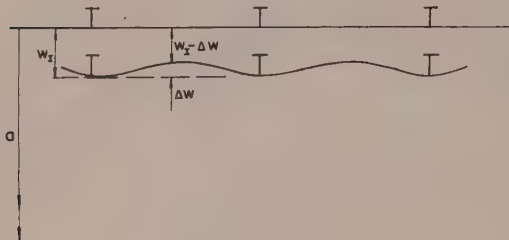


Fig. 5.

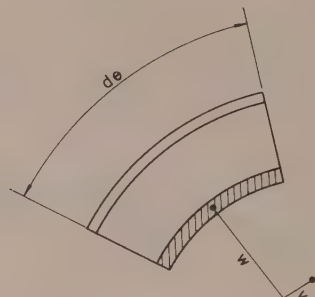


Fig. 6.

provided the strain  $\varepsilon_I$  and displacement  $w_I$  do not change rapidly as function of  $\theta$ . This can be shown as follows: Fig. 6 shows an element of the ring and shell (i. e. a strip of infinitesimal width  $d\theta$ ) in its original undisplaced and undeformed state. Due to a system of forces acting on the ring stiffeners\* there will be radial and tangential displacements of the shell,  $w(x, \theta)$  and  $v(x, \theta)$ , respectively, and of the stiffeners,  $w_I(\theta)$ ,  $v_I(\theta)$ , respectively. The associated circumferential strains are given by

$$\varepsilon = \frac{1}{a} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right). \quad (1-9)$$

To evaluate the response of the shell let the final state of the element be reached in three stages.

1. Displace the element, ring and shell, without deformation by the ultimate displacements  $w_I$  and  $v_I$  of the stiffening rings. As the generators remain straight the shell displacements are

$$w(x, \theta) = w_I(\theta) \quad v(x, \theta) = v_I(\theta) \quad (1-10)$$

2. Give the element, ring and shell, the ultimate curvature of the ring,  $\frac{\partial^2 w_I}{\partial \theta^2}$ , and give the ring simultaneously an average strain such that the circumferential strain  $\varepsilon_I$  vanishes. This step will not produce displacements  $w$ ,  $v$  or circumferential membrane stresses in the shell, but it will produce bending stresses  $\pm \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w_I}{\partial \theta^2}$  in the shell. These bending stresses and their resultant moment are small because  $h$  is small compared to the depth of the stiffener. These stresses will be entirely neglected.

3. As final step give the element of the ring stiffener a circumferential strain equal to its actual ultimate value

$$\varepsilon_I = \frac{1}{a} \left( \frac{\partial v_I}{\partial \theta} - w_I \right). \quad (1-11)$$

This will produce additional displacements and stresses in the adjoining shell. If  $\varepsilon_I$  does not vary rapidly\*\* as function of  $\theta$  one can assume as an approximation that the

\* The effect of forces acting on the shell between stiffeners will be discussed later.

\*\* Meaning rapidly within distances of the order of the effective width  $b$ .



additional stresses and displacements will be equal to those for the case  $n = 0$  due to a strain  $\varepsilon_I$ ; i.e., there will be an additional radial displacement  $\Delta w$  given by Eq. (1-8) while the additional tangential displacement is approximately zero.

Adding the three steps gives the prescribed displacements  $w_I$ ,  $v_I$  and corresponding strains and stresses in the stiffening rings. The stresses in the shell are only due to step 3 and their magnitude can be determined from the effective width concept using Eq. (1-1). The displacements of the shell are the sum of the contribution in steps 1 and 3:

$$w(x, \Theta) = w_I(\Theta) - \Delta w(x, \Theta) \quad (1-12)$$

$$v(x, \Theta) = v_I(\Theta) \quad (1-13)$$

where  $\Delta w$  is given by Eq. (1-8) in which  $\varepsilon_I$  is now a function of  $\Theta$ :

$$w(x, \Theta) = -a \varepsilon_I(\Theta) [1 - \Phi(x)] \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}. \quad (1-14)$$

These equations express the displacements of the shell in terms of those of the rings and of the strains  $\varepsilon_I$ . The displacements  $w_I$  and  $v_I$  can be determined from the appropriate differential equations for curved members using the moment of inertia of the effective cross section.

The above derivation was restricted to the case of loads acting on the ring stiffeners, but not on the shell itself. To treat the general case of arbitrary loads it is necessary to add a preliminary step: Introduce fictional supports for the rings such that the displacements of the rings  $w_I$  and  $v_I$  vanish. The loads on the shell will then produce bending and membrane stresses in the shell and certain reactions on the fictional supports. Inclusion of these fictional reactions in the system of the other loads acting on the rings only, leads to a case similar to the one already treated but with slightly altered loads on the rings. By superposition one obtains the total stresses and displacements as the sum of those due to the altered loads and local stresses and displacements due to the preliminary step. Whether the latter stresses are important or may be neglected can not be stated in a general manner but must be decided for each case.

Equations (1-12 to 1-14) and the corresponding values for the stresses will therefore be reasonably good approximations provided three conditions are satisfied:

1. The local effects due to loads acting directly on the shell must be small.
2. The variation of the strain  $\varepsilon_I$  in the stiffening rings within distances of the order of the effective width  $b$  should be small. In case the loads are proportional to  $\cos n\Theta$  or  $\sin n\Theta$  the strains  $\varepsilon_I$  will change sign within distances  $a\pi/n$ , such that the condition for the validity of Eqs. (1-12 to 1-14),

$$a\pi \gg nb \quad (1-15)$$

results.

3. Because the function  $\Phi(x)$  has been obtained for a shell of infinite length instead of the actual length  $l$ , the result is restricted to cases

$$l > 2\sqrt{ah} \quad (1-16)$$

It would not be difficult to refine the analysis to remove this restriction; this is not done here because Eq. (1-16) is well satisfied in the applications intended, and because the refined analysis leads to lengthy formulas in the case of vibrations.

The approximate theory can be checked versus Ref. 4 by comparing the respective values for the effective width. The values shown in Table A apply for a typical case\*  $h/a \simeq 0.011$ ,  $l/h \simeq 35$ .

\* The parameters used in the symbols of Ref. 4 are:  $k = 10^{-5}$ ,  $l/\pi a = 0.055$ .



Table A. Comparison of Values of the Effective Width  $b$ 

$n =$	2	3	4	5	6
ref. 4: $b/a =$	0,1718	0,1662	0,1609	0,1527	0,1441
Eq. 1-6: $b/a =$	0,158 for all values of $n$				

The differences are of the order of 10%. However, the moment of inertia and section modulus of the effective section are very insensitive to changes in the shell area included, and the final effects on the stress and deflection are much smaller than 10%.

## II. Space Periodic Vibrations of an Infinitely Long Shell with Equidistant Stiffening Rings

The modes of vibration of the shell considered in this section are those where all stiffening rings have mutually identical displacements  $w_I$ ,  $v_I$ , such that the displacements of the shell panels of length  $l$  between rings will be repetitious with period  $l$ , and the stiffening rings will neither twist nor displace in the longitudinal direction  $x$ .

If the stiffening rings are very closely spaced one can use the obvious approximation of treating the stiffener and the adjoining shell of width  $l$  as a ring of solid section of moment of inertia  $I_0$ , giving the fundamental bending frequencies

$$\omega^2 = \frac{E I_0}{m_0 a^4} \frac{n^2 (n^2 - 1)^2}{n^2 + 1}. \quad (2-1)$$

In this equation  $m_0$  is the total mass of the ring and the adjoining shell of width  $l$ ,

$$m_0 = m_I + l m_s \quad (2-2)$$

where:

$m_I$  is the mass of ring per unit of length,

$m_s$  is the mass of the shell per unit of surface area.

This simple concept not only neglects the inertia forces due to the relative displacements  $\Delta w$ ,  $\Delta v$  of shell and rings but also assumes that the effective width of the shell is  $b = l/2$ . From the knowledge concerning the effective width in the static case one can conclude that the above equation might be a reasonable approximation for very close spacing of stiffeners,  $l \ll 2\sqrt{ah}$ , but not for the cases of prime interest,  $l > 2\sqrt{ah}$ . It is interesting to note, however, that regardless of the value of  $l$  Eq. (2-1) gives always an upper limit for the actual value  $\omega^2$ , because this equation can be derived from Raleigh's method from an assumed approximate shape of the mode in which all generators remain straight.

To obtain better approximations for the range  $l > 2\sqrt{ah}$ , one can utilize the effective width concept developed in the static case. It is, however, in general not sufficient simply to use the value  $I$  of the moment of inertia for the effective section in Eq. (2-1), but an appropriately revised expression for Eq. (2-2) defining the mass  $m$  of the equivalent ring must also be used. The necessity for the revision of Eq. (2-2) will be shown by applying Raleigh's method to the problem.

Let  $V$  in the usual manner be the integral expression for the strain energy of the system in terms of the displacements  $u$ ,  $v$ ,  $w$  and their derivatives, and let  $T$  be the kinetic energy



$$T = \int \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dm = \omega^2 \int (u^2 + v^2 + w^2) dm \quad (2-3)$$

where the integration includes all the masses of the system\*. Any reasonable state of displacements  $u$ ,  $v$  and  $w$  furnishes an approximation, and upper limit, for the fundamental frequency

$$\omega_I^2 = \frac{V}{\int (u^2 + v^2 + w^2) dm} \quad (2-4)$$

Because of the periodicity, the integration in the present case includes one ring and a portion of the shell of length  $l$  only.

The shape of the mode is assumed in the following manner:

1. The radial and tangential displacements  $w(x, \Theta)$ ,  $v(x, \Theta)$  are those given by the approximate expressions for the static case. Eqs. (1-12 to 1-14). This implies that the longitudinal displacements vanish,  $u(x, \Theta) = 0$ . The assumption of the static state of displacement means that the effective width concept, and the value  $b$ , Eq. (1-2), apply. The strain energy  $V$  appearing in Eq. (2-4) for this state of displacement can therefore be computed as the strain energy of a ring of "effective cross section" subjected to the displacements  $v_I$ ,  $w_I$  of the ring.

$$V = V \text{ (effective section)} \quad (2-5)$$

2. The deformations of the ring of effective section are assumed to be inextensional, such that the mode shape becomes

$$v_I = \frac{C}{n} \sin n\Theta \quad w_I = C \cos n\Theta \quad u_I = 0 \quad (2-6)$$

where  $C$  is an arbitrary constant.

To evaluate the integral in the denominator of Eq. (2-4) for the assumed mode consider Fig. 7, showing the effective section and its centroid at a distance  $c$  outside\*\* the mean surface of the shell. Because of the assumed inextensional deformation of the ring the strain at the centroid vanishes and the strain  $\epsilon_I$  at the nominal junction of shell and stiffener is equal to the distance  $c$  multiplied by the curvature,

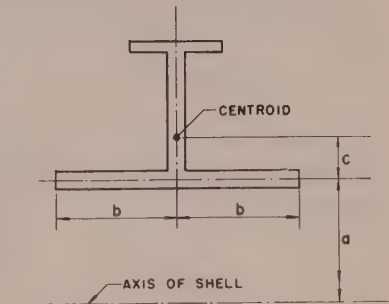


Fig. 7.

$$\epsilon_I = -\frac{c}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w_I}{\partial \theta^2} + w_I \right) = \frac{c}{a^2} (n^2 - 1) w_I \quad (2-7)$$

Substitution in Eqs. (1-12 to 1-14) gives

$$v(x, \Theta) = v_I = \frac{1}{n} w_I$$

$$w(x, \Theta) = w_I - \Delta w = w_I \left\{ 1 + \frac{c}{a} (n^2 - 1) [1 - \Phi(x)] \right\} \quad (2-8)$$

and after routine computations

\* The single integral sign is used for simplicity.

\*\* If the stiffener is located inside the shell  $c$  would be negative.

$$\int (u^2 + v^2 + w^2) dm = m_I \int_0^{2\pi} (v_I^2 + w_I^2) a d\Theta + 2 m_s \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} [(w_I - \Delta w)^2 + v_I^2] a d\Theta dx$$

$$= (m_I + \alpha l m_s) \int_0^{2\pi} (v_I^2 + w_I^2) a d\Theta \quad (2-9)$$

where

$$\alpha = \frac{2n^2}{l(n^2 + 1)} \int \left\{ \left[ 1 + \frac{c}{a} (n^2 - 1) - \frac{c}{a} (n^2 - 1) \Phi(x) \right]^2 + \frac{1}{n^2} \right\} dx. \quad (2-10)$$

The function  $\Phi(x)$  and the parameter  $\beta$  are defined by Eq. (1-4). Due to  $l > 2 \sqrt{ah}$  the approximations

$$\int_0^{1/2} \Phi(x) dx \simeq \int_0^\infty \Phi(x) dx = \frac{1}{\beta}$$

$$\int_0^{1/2} \Phi^2(x) dx \simeq \int_0^\infty \Phi^2(x) dx = \frac{3}{4\beta} \quad (2-11)$$

may be made, and Eq. (2-10) becomes\*

$$\alpha = \frac{n^2}{n^2 + 1} \left\{ \left[ 1 + \frac{c}{a} (n^2 - 1) \right]^2 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{\beta l} \frac{c}{a} (n^2 - 1) \left[ 4 + \frac{5}{2} \frac{c}{a} (n^2 - 1) \right] \right\} \quad (2-12)$$

where  $\beta = 1.36/\sqrt{ah}$ .

The frequency  $\omega_I$  of the stiffened shell can now be computed from Eq. (2-4) by substitution of Eqs. (2-5 and 2-9).

$$\omega_I^2 = \frac{V \text{ (effective section)}}{(m_I + \alpha l m_s) \int (v_I^2 + w_I^2) a d\theta}.$$

This expression can be compared with the one obtained from Raleigh's method for a fictitious ring having the effective cross section and having a mass  $m$  per unit of length

$$\omega^2 = \frac{V \text{ (effective section)}}{m \int (v_I^2 + w_I^2) a d\theta}.$$

It is seen that the resulting frequency  $\omega_I$  for the stiffened shell is equal to the frequency of a fictitious ring having the "effective section" as cross section, and the equivalent mass

$$m = m_I + \alpha l m_s. \quad (2-13)$$

The approximate frequency  $\omega_I$  can therefore be found from the conventional equation

\* This equation is rather unhandy but can be approximated, if desired, for ranges of particular interest. If  $3 \leq l/\sqrt{ah} \leq 4$ , and if  $c/a$  is small

$$\alpha \simeq 1 + \frac{5cn^2}{4a} \quad (2.12a)$$

If  $l$  is very large Eq. (2-12) can be simplified by using  $l \simeq \infty$ ,

$$\alpha_\infty = \frac{n^2}{n^2 + 1} \left\{ \left[ 1 + \frac{c}{a} (n^2 - 1) \right]^2 + \frac{1}{n^2} \right\} \quad (2.12b)$$



$$w_I^2 = \frac{EI}{m\alpha^4} \frac{n^2(n^2 - 1)^2}{n^2 + 1} \quad (2-14)$$

where  $I$  is the moment of inertia of the effective section and  $\bar{a} = a + c$  the radius of the effective cross section of the ring.

It is clear that Eq. (2-14) can be expected to be a good approximation only in those cases where the corresponding static theory holds and Eqs. (1-15 and 1-16) must therefore be satisfied. It is also necessary that the effects on the shell of local loads, in this case the inertia forces, are small. One can state qualitatively that this will be the case if the frequency  $\omega_I$  is appreciably smaller than the frequency of a cylindrical shell of length  $l$  clamped on the edges. The frequency of such a shell being larger than the frequency  $\omega_p$  of a clamped flat plate of length  $l$ , one can conclude that Eq. (2-14) will be applicable if

$$\omega_I \ll \omega_p = 6,5 \frac{h}{l^2} \sqrt{\frac{Eh}{m_s}}$$

This crude condition\* is sufficient but may be much too severe, particularly for small values of  $n$ .

It is interesting to note that the ratios of the frequencies  $\omega_I$  of a stiffened shell for different values of  $n$  are not the same as for a ring because the value of the equivalent mass  $m$  is a function of  $n$ . The equivalent mass  $m$  is larger or smaller than the actual mass  $m_0$  depending on the coefficient  $\alpha$ . If the stiffening rings are on the outside,  $c > 0$  and therefore  $\alpha > 1$ , and  $m$  is larger than  $m_0$ . The coefficient  $\alpha$  differs more from unity as  $n$  becomes larger, as can be seen from Eq. (2-12a). The successive frequencies  $\omega_I$  for a shell with outside stiffeners will therefore increase more slowly than those of a ring. The reverse applies for inside stiffening rings.

For outside stiffeners  $m > m_0$ , and as  $I < I_0$ , Eq. (2-14) gives necessarily a lower, and therefore a better value for the frequency than Eq. (2-1). For inside stiffeners, where  $m < m_0$ , Eq. (2-1) could give smaller, and therefore better frequencies than Eq. (2-14) if  $I_0/m_0 < I/m$ . It appears, however, that such cases inherently require the violation of the condition (2-15).

It is finally appropriate to discuss the displacements of the shell on which the proposed method is based. If the stiffeners are on the outside of the shell the displacement  $w_I$  and the additional deflections  $\Delta w$  are in the same direction, Fig. 8a, while the opposite applies for inside stiffeners, Fig. 8b. The coefficient  $\alpha$  is a measure of the change of the kinetic energy due to the additional displacements  $\Delta w$ .  $\alpha$  is larger or smaller than unity depending on the relative directions of  $w_I$  and  $\Delta w$ . The mode shape, Fig. 8b, seems at first rather unnatural because one does expect the inertia forces due to the mass of the shell to deflect the shell more than the rings. However, the present analysis applies for those cases where the local deflections due to forces acting directly on the shell are small enough to be unimportant, such that the deformation Fig. 8b produced by the "effective width" interaction controls. For high frequencies, ex-

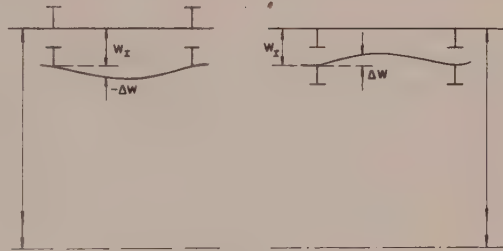


Fig. 8a.

Fig. 8b.

produced by the "effective width" interaction controls. For high frequencies, ex-

\* The example in Section VI Table B seems to indicate good accuracy if  $\omega_I$  is one-half or less than  $\omega_p$ .

cluded by Eq. (2-15), the local effects will become important and the assumed mode shape Fig. 8b will no longer apply. It is in such cases that Eq. (2-1) will give smaller frequencies than Eq. (2-14).

### III. Infinitely Long Unstiffened Shells, and Finite Shells with Rings at the Ends Only

The frequencies and modes of infinitely long cylindrical shells within the range in which the usual shell theories are applicable can be obtained without difficulty. These modes can be described by the wave number  $n$  and the half-wave length  $L$ ,

$$\begin{aligned} u &= U \cos n\Theta \cos \frac{\pi x}{L} e^{i\omega t} \\ v &= V \sin n\Theta \sin \frac{\pi x}{L} e^{i\omega t} \\ w &= W \cos n\Theta \sin \frac{\pi x}{L} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3-1)$$

Shells have three frequencies for each value of the parameters  $n$  and  $L$ . The three corresponding modes differ, having different ratios of the constants  $U:V:W$ .

Tables of the three frequencies and of the corresponding values of the coefficients  $U$ ,  $V$  and  $W$  can be found for  $n \leq 6$  and  $1 \leq L/a \leq 10$  in Ref. 5. It is noted here, for later reference, that these tables indicate that in the fundamental modes, excluding the case  $n = 0$ , two statements can be made:

1. The coefficients satisfy the inequality

$$U < < W \quad (3-2)$$

indicating that the longitudinal motions are of small importance and might be neglected in approximate computations.

2. The relation

$$W - nV \simeq 0 \quad (3-3)$$

is very closely satisfied. As the circumferential strain in the shell, Eq. (1-9), is proportional to  $W - nV$ , it follows that this strain and the corresponding stresses are unimportant and contribute little to the total strain energy of the shell.

A solution for an infinite shell is applicable to a finite shell of length  $L$ , or a multiple thereof, if the boundary conditions agree with the behavior of the solution (3-1). An

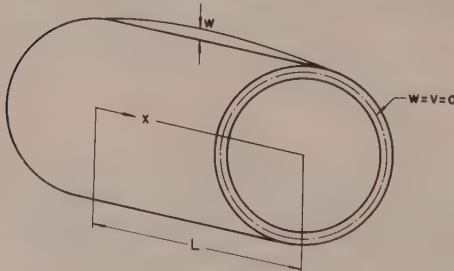


Fig. 9.

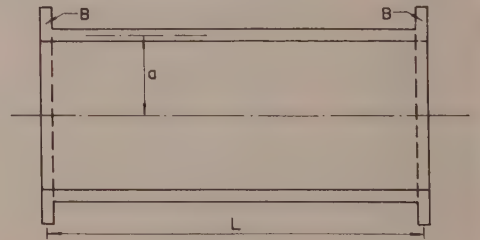


Fig. 10.

obvious, but useful case is the one of a shell of length  $L$ , Fig. 9, supported at the ends such that  $w = v = 0$ , while the longitudinal direct force  $N_x$  and moment  $M_x$  also vanish.



The solution (3-1) for a finite shell, Fig. 9, and the method for stiffened shells developed in Sec. II can be combined to obtain the fundamental mode of a shell of length  $L$  supported by rings at the ends, Fig. 10. It is intended to treat cases  $L \gg b$  such that the local deformations of the shell due to inertia forces neglected in Sec. II must be considered. The Ritz method will be used, assuming that the mode is a combination of two components,  $\Phi_B$  and  $\Phi_s$ .

The component  $\Phi_B$  consists of the displacements  $w_I$  and  $v_I$  of the rings  $B$  (without twisting) given by Eqs. (2-6) and corresponding shell displacements, Eqs. (2-8), exactly as in Sec. II. By Raleigh's method one can find a nominal value  $\omega_B$  for the frequency using the component  $\Phi_B$  as mode shape. According to Sec. II one can compute this value  $\omega_B$  from Eq. (2-14) using the effective moment of inertia  $I$  of the ring including a flange of width  $b$  on one side, and an equivalent mass

$$\bar{m}_B = m_B + \alpha_\infty \frac{L}{2} m_s \quad (3-4)$$

where  $m_B$  is the mass of the ring and  $\alpha_\infty$  is found from Eq. (2-12b) because  $L$  is very large,  $L \simeq \infty$ .

The second component  $\Phi_s$  is a displacement of the shell as defined by Eq. (3-1) and simultaneous longitudinal displacements and twisting of the rings as required to maintain continuity with the shell. The value  $W$  in Eq. (3-1) is to be determined later while the ratios  $U/W$  and  $V/W$  shall be those for the fundamental mode of the infinitely long shell. The ratio (2-4) of potential and kinetic energies for this displacement can again be interpreted as the square of a frequency. Because the longitudinal displacements  $u$  and the rotations  $\frac{\partial w}{\partial x}$  are small the contributions of the rings to the kinetic and potential energy are neglected,\* making the energy ratio equal to  $\omega_s^2$ , where  $\omega_s$  is the fundamental frequency of the shell of infinite length, for the respective values of  $n$  and  $L$ .

To use the Ritz method the energy expressions are required, and will be obtained in stages. The kinetic energy  $T_B$  due to the component  $\Phi_B$  of the displacement can be read directly from Eq. (2-9) using Eq. (2-6), but noting that there are two stiffeners,

$$T_B = \omega^2 \int (u^2 + v^2 + w^2) dm = \omega^2 C^2 J_B \quad (3-5)$$

where

$$J_B = \frac{n^2 + 1}{n^2} - (2 m_B + \alpha_\infty L m_s) a \pi \quad (3-6)$$

$\omega$  is the frequency of the motion considered, and  $C$  the constant in Eq. (2-6). The potential energy  $V_B$  due to the displacement  $\Phi_B$  is simply

$$V_B = \omega_B^2 \int (u^2 + v^2 + w^2) dm = \omega_B^2 C^2 J_B \quad (3-7)$$

which relation is due to the manner in which  $\omega_B$  was defined above. The simplicity of this equation is the sole reason for the introduction of the auxiliary frequency  $\omega_B$ .

The kinetic energy  $T_s$  due to the component of the displacement  $\Phi_s$  requires no explanation, except that the approximations  $U = 0$ ,  $W = nV$  based on Eqs. (3-2, 3) were used.

$$T_s = \omega^2 W^2 J_s \quad (3-8)$$

\* These contributions could be retained, if desired or necessary, without fundamental difficulty.

where

$$J_s = \frac{(n^2 + 1) \pi}{2 n^2} a L m_s. \quad (3-9)$$

The potential energy  $V_s$  due to the displacement  $\Phi_s$  is

$$V_s = \omega_s^2 W^2 J_s \quad (3-10)$$

where  $\omega_s$  is the fundamental shell frequency defined above.

The potential energy  $V$  due to the combination of displacements  $\Phi_s$  and  $\Phi_B$  will be the sum of  $V_s$ ,  $V_B$  and of a coupling term  $V_{sB}$ . No contribution to the coupling term can originate from any stress at any point if this stress vanishes in one of the two states  $\Phi_s$  or  $\Phi_B$ . The only contribution from membrane stresses can therefore come from circumferential ones,  $\sigma_\theta$ . These stresses are substantial in the component  $\Phi_B$  for a distance of an order equal to the effective width from the rings. There are stresses  $\sigma_\theta$  due to the displacement  $\Phi_s$ , but they are small because of Eq. (3-3), and in this location even smaller because these stresses are proportional to  $\sin \frac{\pi x}{L}$ . These small coupling effects, and additional ones due to small bending stresses in the shell are neglected, such that the total strain energy becomes

$$V = \omega_B^2 C^2 J_B + \omega_1^2 W^2 J_s. \quad (3-11)$$

The total kinetic energy is similarly

$$T = T_B + T_s + T_{Bs} \quad (3-12)$$

where the coupling term  $T_{Bs}$  is however significant, and must be evaluated,

$$T_{Bs} = \omega^2 \int (u_B u_s + v_B v_s + w_B w_s) dm = \omega^2 C W J_{Bs}. \quad (3-13)$$

The subscripts  $B$  and  $s$  in this equation indicate the displacements due to  $\Phi_B$  and  $\Phi_s$ , respectively. The rings do not contribute to  $T_{Bs}$  because the relations  $u_B = v_s = w_s = 0$  apply for their displacements. The displacements of the shell due to  $\Phi_s$  are given by Eqs. (3-1); substituting Eqs. (3-2 and 3-3) they become approximately

$$\begin{aligned} v_s &= \frac{W}{n} \sin n \Theta \sin \frac{\pi x}{L} & u_s &= 0 \\ w_s &= W \cos n \Theta \sin \frac{\pi x}{L} \end{aligned} \quad (3-14)$$

The displacements due to  $\Phi_B$  are defined by Eqs. (2-6 and 2-8). Because the length  $L$  is large,  $L \gg \sqrt{ah}$ , the term  $\Phi(x)$  is very small, except close to  $x = 0$  and  $x = L$  where  $w_s$  is very small, and  $\Phi(x)$  can therefore be dropped from Eq. (2-8) for the present purpose. Thus

$$\begin{aligned} v_B &= \frac{C}{n} \sin n \Theta \\ w_B &= C \left[ 1 + \frac{c}{a} (n^2 - 1) \right] \cos n \Theta. \end{aligned} \quad (3-15)$$

Substitution and integration gives finally

$$J_{Bs} = a L m_s \left[ \frac{n^2 + 1}{n^2} + \frac{c}{a} (n^2 - 1) \right]. \quad (3-16)$$



The energy expression  $T - V$  is a quadratic function of the parameters  $C$  and  $W$ . Minimizing this expression in the usual manner leads to the simple frequency equation

$$\left[ \frac{\omega_B^2}{\omega^2} - 1 \right] \left[ \frac{\omega_s^2}{\omega^2} - 1 \right] = \beta^2 \quad (3-17)$$

whose lower root  $\omega = \omega_F$  is the desired approximate frequency of the shell of finite length, Fig. 10. The non-dimensional coefficient  $\beta^2$  is defined by

$$\beta^2 = \frac{J_{Bs}^2}{J_B J_s} = \frac{2 L m_s}{\pi^2 (2 m_B + \alpha_\infty L m^7)} \left[ 1 + \frac{c n^2 (n^2 - 1)}{a (n^2 + 1)} \right]. \quad (3-18)$$

The shape of the mode can be found from the ratio

$$\frac{W}{C} = \frac{2 \omega_F^2}{\pi (\omega_s^2 - \omega_F^2)} \left[ 1 + \frac{c n^2 (n^2 - 1)}{a (n^2 + 1)} \right]. \quad (3-19)$$

It can be shown that Eq. (3-18) gives necessarily  $\beta^2 \leq 1$ , and that the lower root of Eq. (3-17) is necessarily smaller than the smaller of the two auxiliary frequencies  $\omega_s$  and  $\omega_B$ . It is also useful to know that in case one of the two frequencies  $\omega_s$  and  $\omega_B$  is much larger than the other, the lower root of Eq. (3-17) is nearly equal to the lower of the two auxiliary frequencies  $\omega_s$  and  $\omega_B$ .

#### IV. Shells with Diaphragms and Intermediate Stiffeners; Finite Shells

The results of Secs. II and III can be combined to obtain the frequencies of infinitely long shells, Fig. 11, with equidistant diaphragms (or bulkheads) and intermediate stiffeners. These diaphragms, deemed to be massless, are devices enforcing the conditions  $w = v = 0$ , but exert no other restraints, such that without the intermediate stiffeners the modes Eqs. (3-1) would apply. The frequencies found in this manner are valid also for finite shells of length  $L$  if the end conditions are suitable.

It is known from Sec. II that the state of stress and the deformations in the vicinity

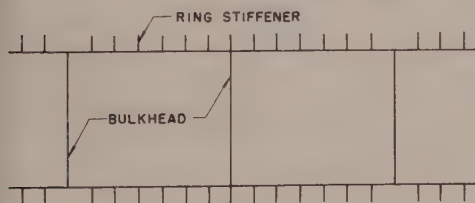


Fig. 11.

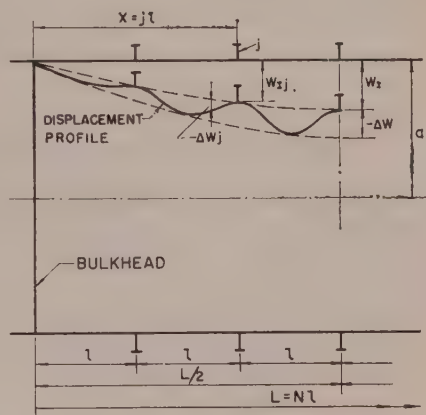


Fig. 12.

of a stiffener are well described by the static case. It is therefore assumed that the displacements of the shell will be those for the fundamental mode of the unstiffened shell, Eq. (3-1), modified locally by additional displacements  $\Delta w$ , Eqs. (2-8). The displacement profile of the shell is indicated in Fig. 12 for a section of the shell of length  $L/2$ . It is assumed that the amplitude of the displacements of the rings vary in the longitudinal direction such that the displacement of the ring at  $x = jl$  will be

$$w_{Ij} = w_I \sin \frac{\pi j}{N} \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (4-1)$$

$$v_{Ij} = \frac{1}{n} w_I \sin \frac{\pi j}{N}$$

where  $w_I = C \cos n\Theta$  is the radial displacement of the ring at  $x = \frac{L}{2}$ , and  $N = L/l$ . Because the strains at the junction of ring and shell will vary as  $\sin \frac{\pi j}{N}$ , the deviation  $\Delta w_j$  of the shell from the shape  $W \cos n\Theta \sin \frac{\pi x}{L}$  near the stiffener at  $x = jl$  will also contain this factor,

$$\Delta w_j = \Delta w \sin \frac{\pi j}{N} \quad (4-2)$$

where  $w$  is given by Eq. (2-8).

Rayleigh's method gives the frequency in the form

$$\omega^2 = \frac{V}{\int (u^2 + v^2 + w^2) dm} \quad (4-3)$$

where the strain energy  $V$  and the value of the integral must be found for the assumed mode.

The stresses in the shell and attached stiffeners can be obtained by superposition from the stresses  $\sigma_s$  in an unstiffened shell of displacements Eq. (3-1), and the stresses  $\sigma_I$  in the rings and adjacent portions of the shell as obtained in Sec. I when considering the effective width concept. The entire strain energy is the sum of the strain energy  $V_s$  due to the stresses  $\sigma_s$  alone, the strain energy  $V_I$  due to the stresses  $\sigma_I$ , and coupling terms. The strain energy  $V_I$  of the ring at  $x = L/2$  and of the adjacent shell due to the stresses  $\sigma_I$  is the strain energy of a ring of effective cross section. Because of Eq. (4-1) the strain energy of any one of the other rings is  $\sin^2 \frac{\pi j}{N} V_I$ , such that the entire strain energy due to  $\sigma_I$  becomes  $\frac{N}{2} V_I$ . The only membrane stresses in the shell which can give rise to coupling terms are the circumferential stresses  $\sigma_\theta$  in the vicinity of the rings due to the effective width action which will do work on the circumferential strains  $\epsilon_\theta$  due to the stresses  $\sigma_s$ . These strains, however, are quite small because of Eq. (3-3) and the resulting coupling terms are also small and will be neglected. The only other coupling effect is due to longitudinal bending stresses and strains which are also neglected because the bending effects due to the displacements Eq. (3-1) are unimportant if  $n$  is small. Neglecting further the small contributions to the strain energy due to twisting and lateral bending of the stiffeners, Eq. (4-3) becomes

$$\omega^2 = \frac{V_s}{\int (u^2 + v^2 + w^2) dm} + \frac{V_I}{\frac{2}{N} \int (u^2 + v^2 + w^2) dm} \quad (4-4)$$

The denominator expressions in this equation can be evaluated in the manner used in the case of Eq. (2-9). Neglecting again contributions from twisting of the stiffeners,

---

\* Note:  $\sum_{j=1}^{N-1} \sin^2 \frac{\pi j}{N} = \frac{N}{2}$



the first fraction, suitably arranged, can be interpreted as the square of the fundamental frequency  $\omega_s$  of a fictional unstiffened shell having an equivalent, mass

$$m_1 = \frac{1}{\alpha} \left[ \alpha m_s + \frac{m_I}{1} \right] \quad (4-5)$$

where  $\alpha$  is defined by Eq. (2-12 or 12a), while

$$\bar{\alpha} = \left| 1 + \frac{c}{a} (n^2 - 1) \right|^2 \quad (4-6)$$

The frequency  $\omega_s$  can be conveniently taken from the tables of Ref. 5.

The last term of Eq. (4-4) can be interpreted as the square of the frequency  $\omega_I$ , Eq. (2-14), for a fictional ring having the effective cross section and the equivalent mass given by Eq. (2-13). The frequency  $\omega$  of the stiffened shell can therefore be computed very simply from the frequency of a fictional unstiffened shell, and of a fictional circular ring,

$$\omega^2 = w_s^2 + \omega_I^2.$$

It may be noted that the dependency of the two terms  $\omega_s^2$  and  $\omega_I^2$  on the mode number  $n$  differs. For the same value of  $L$  the ring frequency  $\omega_I$  increases very rapidly as  $n$  increases, while the shell frequency  $\omega_s$  varies comparatively little for the low values of  $n$  to which the solution presented is applicable. As a result, the effect of the longitudinal wave length  $L$  on the frequency  $\omega$  is insignificant if  $n$  is large, and in such cases the frequency  $\omega_I$  for  $L = \infty$  is already a satisfactory approximation.

It is evident that the proposed procedure can not be expected to give useful results unless the various approximations made are reasonable for the specific shell considered. It is therefore necessary that the restriction Eq. (2-15) is satisfied, and that neglecting of the effects of the twisting of the ring stiffeners is reasonable, which may require a qualitative investigation.

## V. Finite Shells with Intermediate Stiffeners and End Rings

The results of the previous section may be used to find the frequencies of finite shells of length  $L$  or multiples thereof, provided the edges are appropriately supported, such that  $w = v = 0$  at the edges. It is also possible to treat cases of shells with end rings, Fig. 13, where these conditions are not satisfied, by utilizing the results found in Sec. III for unstiffened shells with end rings. By assuming the shape of the mode to be the one pertaining to the value  $C/W$  given by Eq. (3-19), with local modifications  $\Delta w$  near the intermediate stiffening rings, the frequency can be computed by Rayleigh's method. It is found that the frequency is given by a modification of Eq. (4-7),

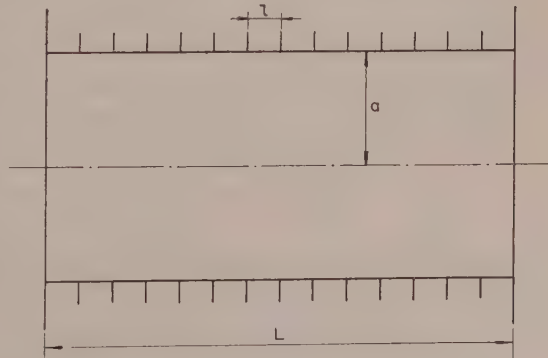


Fig. 13.

$$\omega^2 = \omega_F^2 + \mu \omega_I^2. \quad (5-1)$$

In this equation  $\omega_F$  is the frequency Eq. (3-17) of a shell with end rings having an equivalent mass  $m_1$  given\* by Eq. (4-5). The frequency  $\omega_I$  is the frequency of the ring of effective cross section having the equivalent mass given by Eq. (2-13);  $\mu$  is a number which is less than unity, but more than the ratio of the mass of the shell and of the intermediate stiffeners to the total mass.  $\mu$  is near unity, except if the frequency  $\omega_B$  occurring in Eq. (3-17) is very much smaller than  $\omega_S$ ; excluding this unlikely case one can use approximately  $\mu = 1$ , resulting finally in

$$\omega^2 = \omega_F^2 + \omega_I^2. \quad (5-2)$$

The successive steps for the computation of the frequency are as follows: Using Eq. (4-5)

$$m_1 = \frac{1}{\alpha} \left( \alpha m_4 + \frac{m_I}{1} \right)$$

$\omega_F$  is found as the lowest root of an equation similar to Eq. (3-17),

$$\left[ \frac{\omega_B^2}{\omega_F^2} - 1 \right] \left[ \frac{\omega_S^2}{\omega_F^2} - 1 \right] = \beta^2 \quad (5-3)$$

where

$$\beta^2 = \frac{L m_1}{\pi^2 \left( m_B + \frac{2}{L} \alpha_\infty m_1 \right)} \left[ 1 + \frac{\bar{c} n^2 (n^2 - 1)}{\alpha (n^2 + 1)} \right]. \quad (5-4)$$

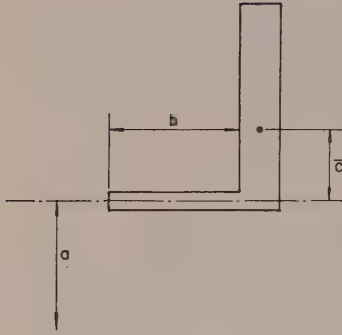


Fig. 14.

The distance  $\bar{c}$  in this equation is the excentricity of the effective section of the end ring, Fig. 14.

The frequency  $\omega_s$  in Eq. (5-3) is that of an unstiffened finite shell of mass  $m_1$  to be taken from Ref. 5. The value  $\omega_B$  is the frequency of the end ring, the moment of inertia of which is adjusted to include one flange of effective width  $b = 0,74 \sqrt{ah}$ , and the mass of which is increased to the value

$$\bar{m}_B = m_B + \frac{L}{2} \alpha_\infty m_1. \quad (5-5)$$

It should not be overlooked that in computing  $\alpha$  and  $\bar{\alpha}$  from Eqs. (2-12) and (4-6), respectively, the value  $c$  is the excentricity for the intermediate stiffeners, while when computing  $\alpha_\infty$  from Eq. (2-12 b) for use in Eq. (5-4) the excentricity for the end ring  $c = \bar{c}$  must be used.

The value  $\omega_I$  in Eq. (5-2) is the frequency of the intermediate stiffening ring including two flanges of effective width  $b$ , and having an equivalent mass

$$m = m_I + \alpha m_s. \quad (5-6)$$

It must be stressed that the procedure outlined in this section implies that the end rings oscillate in their own plane only; if the end rings also twist appreciably and/or move in the longitudinal direction the above analysis does not apply.

\* Note that this equivalent mass  $m_1$  must also be used as value  $m_s$  in Eq. (3.4) for  $m_B$ .



## VI. Comparison with Reference 1 and with Test Results

The frequencies obtained by the approximate method outlined in Sec. II for the case of space periodic vibrations of an infinitely long shell with equidistant stiffening rings can be compared with the results of the analysis by Gondikas, Ref. 1. The latter is based on a solution of the differential equations for thin shells and is therefore expected to be much more accurate than the approximate theory presented here.

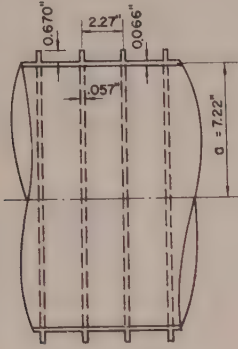


Fig. 15a.

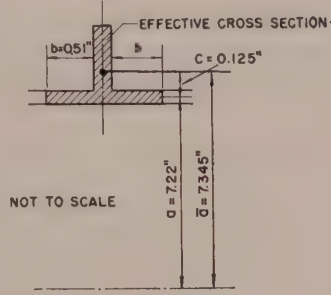


Fig. 15b.

A typical cross-section of the steel shell and of the stiffeners is shown in Fig. 15a. The significant dimensions of the shell considered are  $h = 0,066$  in.,  $a = 7,22$  in., and the stiffener spacing is  $l = 2,27$  in. The effective width  $b$  of the flanges to be included in the ring cross-section is, Eq. (1-6),

$$b = 0,74 \sqrt{ah} = 0,51 \text{ in.}$$

The effective section of the rings is shown in Fig. 15b. The location of the centroid of the effective section, its radius  $\bar{a}$  and its moment of inertia  $I$  are now found in a routine manner,  $c = 0,125$  in.,  $\bar{a} = 7,345$  in. and  $I = 0,00489$  in.<sup>4</sup>. The mass  $m_s$  of the shell per unit of area, and the mass  $m_I$  of stiffener per unit of length are

$$10^4 m_s = 0,483 \quad lb. \text{ sec.}^2/\text{in.}^3$$

$$10^4 m_I = 0,280 \quad lb. \text{ sec.}^2/\text{in.}^2$$

Using the above data Table B shows the values of the coefficient  $\alpha$ , of the mass  $m$  and of the desired frequency  $\omega_I$ , computed for  $n = 2$  to 6 from the simple Eqs. (2-12a), (2-13) and (2-14), respectively. It was pointed out in Sec. II that the frequencies obtained can only be expected to be good approximations if the values lie sufficiently below the limit given by Eq. (2-15). In the present case this requires

$$\omega_I \ll 6,5 \frac{h}{l^2} \sqrt{\frac{Eh}{m_s}} \simeq 16\,700 \text{ radians per sec.}$$

As this limit is only about one third larger than the value  $\omega_I$  found for  $n = 5$  in. Table B, it must be concluded that the analysis no longer applies for  $n \geq 5$ . The values for  $n > 5$  must be expected to be appreciably in error, but the frequencies for  $n < 5$  should be reasonably close. This expectation is confirmed by the comparison with the results of Ref. 1, shown in the last line of Table B; the error up to  $n = 4$  is less than 4%. Table B confirms therefore the validity of the approximate theory within the range limitation of Eq. (2-15).

Table B.

$n =$	2	3	4	5	6
$\alpha =$	1,086	1,194	1,345	1,539	1,776
$10^4 m \text{ (lb. sec.}^2\text{) } n.^2\text{)}$	1,471	1,590	1,755	1,968	2,228
Frequency $\omega_I$ (rad. per sec.)	1570	4270	7810	11950 ?	16500 ?
From Ref. 1, $\omega =$	1560	4230	7530	10950	13600

Using test data obtained at the David Taylor Model Basin, US. Navy, a comparison of experimental and computed frequencies was made for a ring stiffened shell the ends of which were supported by heavier end rings. The stiffened shell, Fig. 16, was carefully

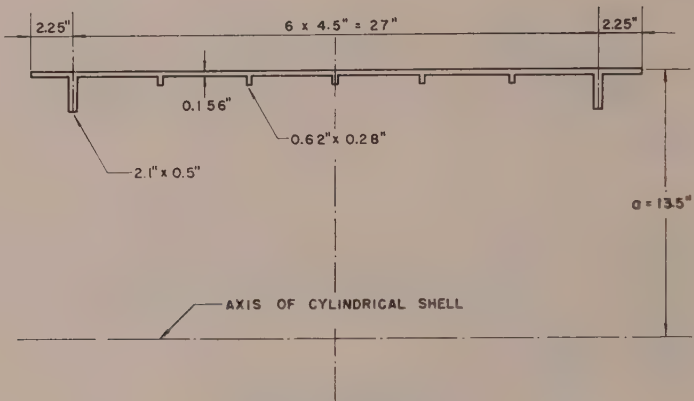


Fig. 16.

machined from a thick steel tube. Table C gives the observed frequencies, and the computed ones, using the method outlined in Section V. The limit for the validity of the theory in the present case, computed from Eq. (2-15), is:  $f < 1630$  cycles/sec. Experimental data are available only for  $n = 2$  to 6, and they are all in the range of validity of the theory. It is seen that computed and experimental values are in good agreement.

Table C. Frequencies  $f$  in cycles per second

$n =$	2	3	4	5	6
computed: $f =$	161	370	415	529	720
observed: $f =$	173	346	407	526	726

VII. Conclusions

An approximate theory has been presented which permits the determination of the fundamental frequencies for  $n = 2, 3 \dots$  of ring stiffened cylindrical shells of finite or infinite length. The theory is limited to frequencies up to the limit given by Eq. (2-15). Being an approximate theory for engineering purposes only, a limited accuracy, better than 10% can be obtained.



To cover cases of finite shells where the end supports do not justify the assumption of absolute rigidity, Sec. V treats the case of finite shells with end rings. The dynamic rigidity of the end rings for small  $n$ , particularly  $n = 2$ , is much less than one might expect, and any assumption of absolute rigidity should be carefully verified.

The theory is confirmed by comparison with an available refined theory for shells of infinite length Ref. 1, and with experimental frequencies for finite shells.

The approximate theory is also applicable to shells of infinite length in a fluid. To account for the fluid it is only necessary to include in the analysis the effect of the virtual mass of the fluid given for this case in Ref. 3.

#### References

<sup>1</sup> P. Gondikas: Vibrations of Ring-Stiffened Cylindrical Shells, Doctoral Thesis, Columbia University, 1955. (Also Contract Nonr 266(08), Technical Report No. 13, Columbia University, March 1955).

<sup>2</sup> "Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs", Manual of Engineering Practice — No. 31, Am. Soc. of Civil Engineers, New York, 1952.

<sup>3</sup> H. H. Bleich and M. L. Baron: Free and Forced Vibrations of an Infinitely Long Cylindrical Shell in an Infinite Acoustic Medium, Journal of Applied Mechanics, June 1954.

<sup>4</sup> C. B. Biezeno and J. J. Koch: The Effective Width of Cylinders, Periodically Stiffened by Circular Rings, Proc. Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen, Vol. 48, 1945, p. 147.

<sup>5</sup> M. L. Baron and H. H. Bleich: Tables for the Frequencies and Modes of Free Vibrations of Infinitely Long Thin Cylindrical Shells, Journal of Applied Mechanics, June 1954.

(Received September 19, 1960)

## Beseitigung von Restspannungen in Fachwerken durch Belastung

Von F. Chmelka, Wien

**Zusammenfassung.** Werden statisch unbestimmte Tragwerke über die Elastizitätsgrenze hinaus belastet, so weisen sie nach Entlastung im allgemeinen Restspannungen auf. Es wird die Frage erörtert, ob man diese Restspannungen bei Fachwerken dadurch beseitigen kann, daß man die ursprünglich gegebene Belastung im entgegengesetzten Sinn und mit einem geeigneten Faktor multipliziert erneut aufbringt und wieder entlastet. Es zeigt sich, daß dies nur bei einfach statisch unbestimmten Fachwerken gelingt, während schon bei zweifach statisch unbestimmten Fachwerken im allgemeinen neue Lasten hinzugenommen werden müssen.

1. Mit Fragen, welche Restspannungen nach plastischen Verformungen, oder überhaupt Eigenspannungen betreffen, haben sich schon H. Bleich, A. und L. Föppl, E. Melan, W. Prager\* und viele andere beschäftigt, und auch die im folgenden behandelten Fragen sind da und dort zwar gestreift, aber kaum ausführlich behandelt worden.

Wir wollen hier nur Fachwerke betrachten, und zwar ideale Fachwerke, deren Stäbe aus ideal plastischem Material bestehen. Bis zur Fließgrenze gilt also das Hookesche Gesetz, eine Überschreitung der Fließgrenze ist nicht möglich. An der Fließgrenze kann, soweit es die äußeren Umstände gestatten, jede beliebige Formänderung eintreten. Die Entlastung aus dem Fließbereich erfolgt nach dem Hookeschen Gesetz. Im folgenden sei weiter vorausgesetzt, daß Zug- und Druckfließgrenze dem Betrag nach gleich hoch liegen und sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

\* Siehe z. B. W. Prager, Probleme der Plastizitätstheorie, Birkhäuser, Basel 1955, wo sich noch weitere Literaturhinweise finden.

Restspannungen nach plastischen Verformungen können nur in statisch unbestimmten Fachwerken auftreten und entstehen dadurch, daß die Stäbe durch irgendeinen Belastungsvorgang plastisch gedehnt oder zusammengedrückt wurden und nach Wegnahme der Belastung nicht mehr ihre ursprüngliche Länge annahmen. Bei einem statisch bestimmten Fachwerk stört das nicht; bei einem statisch unbestimmten Fachwerk jedoch passen die Längen der überzähligen Stäbe im allgemeinen nicht mehr in den Verband. Würde man diese Stäbe durchschneiden, dann würden an den Schnittstellen Lücken oder Überschiebungen auftreten, die in den undurchschnittenen Stäben durch Kräfte verhindert werden. Diese Kräfte wirken sich auch auf die übrigen Stäbe aus. Für ein  $n$ -fach statisch unbestimmtes Fachwerk seien diese Kräfte in den überzähligen Stäben mit  $X'_1 \dots X'_n$  bezeichnet. Ist  $S_{p1}$  jene Kraft, die im Stab  $p$  des Grundsystems auftritt, wenn dieses an der Schnittstelle des Stabes 1 mit zwei gegen-  
gleichen Kräften von der Größe 1 (kurz: mit  $X_1 = 1$ ) belastet wird und haben  $S_{p2}$  usw. die entsprechende Bedeutung, so gilt für die Stabkraft, die im Stab  $p$  des unbestimmten Systems nach der Entlastung zurückbleibt

$$S_p^r = \sum_{l=1}^n S_{pl} X'_l. \quad (1)$$

Wir wollen uns im folgenden mit der Frage befassen, ob und wie man einen solchen Restspannungszustand durch eine geeignete Wiederbelastung des Fachwerks und nachfolgende Entlastung beseitigen kann.

Wir setzen stets voraus, daß bei Druckbeanspruchung keine Knickerscheinungen auftreten, daß also knickgefährdete Stäbe, solange der für sie kritische Belastungszustand andauert, etwa durch seitliches Festhalten am Ausweichen gehindert werden.

2. Wir betrachten zunächst ein einfach statisch unbestimmtes Fachwerk. Ob innerlich oder äußerlich statisch unbestimmt, ist gleichgültig, denn wir können ein äußerlich statisch unbestimmtes Fachwerk immer auch als innerlich statisch unbestimmt auffassen, was wir im folgenden auch stets tun wollen. Das Fachwerk sei mit einer Anzahl Lasten belastet, die wir unter der Bezeichnung  $P$  zusammenfassen. Diese Lasten sollen, in gleichen Verhältnissen zueinander bleibend, langsam anwachsen (proportionale Belastung). Wir drücken dies dadurch aus, daß wir die jeweilige Belastung mit  $\mu P$  bezeichnen und annehmen, daß  $\mu$ , von null beginnend, langsam zunimmt, bis in einem Stab Fließen einsetzt. Wir setzen voraus, daß dies ein Stab sei, der als überzählig betrachtet werden kann, da sonst das Fachwerk einstürzen würde. Wir bezeichnen diesen Stab mit  $a$ , seine Stabkraft an der Fließgrenze sei  $X_a^0$ . Nach den im Abschnitt 1 gemachten Voraussetzungen fließt dann derselbe Stab in entgegengesetzter Richtung, wenn die Stabkraft den Wert  $-X_a^0$  erreicht.

Mit dem bloßen Erreichen der Fließkraft  $X_a^0$  bricht das Fachwerk im allgemeinen noch nicht zusammen, sondern wir können die Belastung noch so lange weiter steigern, bis ein weiterer Stab zum Fließen kommt\*.

Im folgenden wählen wir als Grundsystem (GS) jenes Tragwerk, das wir erhalten, wenn wir den Stab  $a$  durchschneiden. Es bedeutet:

- $S_p$  die Stabkraft im Stab  $p$  des unbestimmten Systems, wenn der Stab  $a$  bereits fließt,  
 $S_p^e$  die Stabkraft im Stab  $p$  des unbestimmten Systems, wenn das Hookesche Gesetz als unbeschränkt gültig angenommen wird,

\* W. Prager zeigt (a.a.O., S. 25), daß auch in diesem Fall u. U. eine weitere Erhöhung der Belastung möglich ist, da das Eintreten eines neuen Stabes in den Fließbereich zur Entlastung eines vorher fließenden Stabes führen kann. Wir wollen hier jedoch auf diesen Fall nicht eingehen.



$S_{pP}$  die Stabkraft im Stab  $p$  des GS infolge der Belastung  $P$ , also für  $\mu = 1$ ,  
 $S_{pa}$  die Stabkraft im Stab  $p$  des GS, wenn dieses an der Schnittstelle des Stabes  
 $a$  mit  $X_a = 1$  belastet ist,  
 $X_{aP}$  die Stabkraft im Stab  $a$  des unbestimmten Systems infolge der Belastung  
 $P$  ( $\mu = 1$ ), wenn das Hookesche Gesetz als unbeschränkt gültig ange-  
 nommen wird,

Analog sind die später verwendeten Bezeichnungen  $S_{pQ}$ ,  $S_{pb}$ ,  $X_{aQ}$ ,  $X_{bP}$ ,  $X_{bQ}$  usw. zu verstehen. Durch den oberen Index 0 wird eine Fließkraft gekennzeichnet, durch den oberen Index  $r$  eine Restspannung.

Solange noch alles elastisch ist, gilt für die Stabkraft im Stab  $p$  des unbestimmten Systems infolge der Belastung  $\mu P$

$$S_p^e = \mu S_{pP} + S_{pa} \mu X_{aP}. \quad (2)$$

Diese Gleichung gilt bei steigender Belastung bis zu einem Wert  $\mu_0$ , der gegeben ist durch

$$\mu_0 X_{aP} = X_a^0,$$

$$\text{also} \quad \mu_0 = \frac{X_a^0}{X_{aP}} \quad (3)$$

Für  $\mu \geq \mu_0$  fließt der Stab  $a$  und es gilt für die Kraft im Stab  $p$

$$S_p = \mu S_{pP} + S_{pa} X_a^0. \quad (4)$$

Diese Gleichung gilt auch für den Stab  $a$ , denn es ist  $S_{aP} = 0$ ,  $S_{aa} = 1$ .

Wenn wir nun das Fachwerk aus dem durch Gl. (4) gegebenen Zustand vollständig entlasten, so geht dies in vollkommen elastischer Weise vor sich. Wir haben von den Stabkräften gemäß Gl. (4) jene Werte der Stabkräfte abzuziehen, die sich für denselben Wert von  $\mu$  wie in Gl. (4), aber bei unbeschränkter Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes ergeben würden. Diese Stabkräfte sind durch Gl. (2) gegeben, die jetzt auch für  $\mu > \mu_0$  als gültig anzusehen ist. Die Differenz stellt die nach vollständiger Entlastung in dem Fachwerk verbleibenden Restspannungen dar:

$$S_p^r = S_p - S_p^e = S_{pa} (X_a^0 - \mu X_{aP}), \text{ für } \mu \geq \mu_0. \quad (5)$$

Für den Stab  $a$  ist die Restspannung

$$S_a^r = X_a^r = X_a^0 - \mu X_{aP}, \quad (6)$$

so daß wir für die Reststabkraft im Stab  $p$  auch schreiben können [vgl. Gl. (1)]

$$S_p^r = S_{pa} X_a^r. \quad (7)$$

Wir fragen nun, ob dieser Restspannungszustand durch eine geeignete Wiederbelastung und nachfolgende neuerliche Entlastung wieder zum Verschwinden gebracht werden kann. Es ist zu erwarten, daß dies gelingt. Denn die Restspannungen nach Gl. (5) sind dadurch entstanden, daß der Stab  $a$  während des Belastungsvorganges plastisch gedehnt (oder gestaucht) wurde und daß diese Dehnung bei der nachfolgenden Entlastung nicht mehr vollständig zurückging. Es muß daher möglich sein, durch eine entsprechende Gegenbelastung eine neuerliche plastische Verformung des Stabes  $a$  und zwar im entgegengesetzten Sinn wie vorhin zu erzielen, so daß der Stab nach abermaliger Entlastung wieder ohne Zwang in das Fachwerk hineinpaßt und somit der ursprüngliche Zustand wiederhergestellt ist.

Wir sehen zu, ob wir unser Ziel mit derselben Lastgruppe  $P$  erreichen, mit der die Belastung vorgenommen wurde, der Lastfaktor sei jetzt  $\bar{\mu}$ . Wir setzen zunächst voraus, daß die Restspannungen sämtlich im elastischen Bereich liegen. Sofern  $\bar{\mu}$  noch entsprechend klein ist, sind dann noch alle Stäbe elastisch verformt und es gilt für die Kraft im Stab  $p$

$$\bar{S}_p^e = S_p^r + \bar{\mu} S_{pP} + S_{pa} \bar{\mu} X_{aP}, \quad (8)$$

oder, unter Verwendung von Gl. (7)

$$\bar{S}_p^e = \bar{\mu} S_{pP} + S_{pa} (\bar{\mu} X_{aP} + X_a^r). \quad (9)$$

Bei entsprechender Steigerung von  $\bar{\mu}$  wird wieder Fließen einsetzen, und wir setzen voraus, daß wiederum der Stab  $a$  als erster fließe\*, diesmal bei der Stabkraft  $-X_a^0$ . Das Fließen beginnt, wenn der Lastfaktor  $\bar{\mu}$  einen Wert  $\bar{\mu}_0$  erreicht, so daß

$$\bar{\mu}_0 X_{aP} + X_a^r = -X_a^0$$

ist, woraus wir, wenn wir für  $X_a^r$  seinen Wert aus Gl. (6) einsetzen und wenn wir ferner noch Gl. (3) berücksichtigen, erhalten

$$\bar{\mu}_0 = \mu - \frac{2 X_a^0}{X_{aP}} = \mu - 2 \mu_0. \quad (10)$$

Wir sehen aus dieser Beziehung, daß für  $\mu = \mu_0$ , also in dem Fall, wo bei der ersten Belastung nur so weit gegangen wurde, daß der Stab  $a$  eben zu fließen beginnt, sich  $\mu_0 = -\mu_0$  ergibt, daß also bei der Gegenbelastung bei derselben Lastintensität ebenfalls Fließen einsetzt. Ist dagegen  $\mu_0 < \mu < 2 \mu_0$ , dann ist  $\bar{\mu}_0$  dem Betrag nach kleiner als  $\mu_0$ , d. h. bei der Gegenbelastung setzt das Fließen schon früher ein als bei der ursprünglichen Belastung\*\*.

Wir lassen nun  $\bar{\mu}$  dem Betrag nach über  $|\bar{\mu}_0|$  anwachsen. Dann geht Gl. (9) über in

$$\bar{S}_p = \bar{\mu} S_{pP} - S_{pa} X_a^0. \quad (11)$$

Entlasten wir aus diesem Stadium, so geht die Entlastung wieder vollkommen elastisch vor sich, d. h. wir haben von Gl. (11) die Stabkraft

$$\bar{S}_p^e = \bar{\mu} S_{pP} + S_{pa} \bar{\mu} X_{aP} \quad (12)$$

abzuziehen. Wir erhalten dann die Restspannungen, von denen wir verlangen, daß sie für sämtliche Stäbe verschwinden sollen

$$\bar{S}_p^r = \bar{S}_p - \bar{S}_p^e = -S_{pa} (X_a^0 + \bar{\mu} X_{aP}) = 0. \quad (13)$$

Damit dies der Fall ist, muß gelten

$$\mu = -\frac{X_a^0}{X_{aP}} = -\mu_0. \quad (14)$$

\* Es zeigt sich, daß dies zutrifft, falls  $\mu$  den Wert  $\mu_0$  nur innerhalb gewisser Grenzen übersteigt. Aber auch wenn bei der Wiederbelastung der Stab  $a$  nicht als erster zum Fließen kommen sollte, ändert dies nichts an unserem Endergebnis (s. etwa Prager, a. a. O.).

\*\* Der Fall, daß  $\mu \geq 2 \mu_0$  ist, wird in Abschnitt 4 behandelt.



Es ist bemerkenswert, daß dieser Wert gänzlich unabhängig ist von  $\mu$ . Die Lastintensität, welche die Restspannungen zum Verschwinden bringt, ist gleich und entgegengesetzt jener Lastintensität, bei der ursprünglich zum ersten Mal die Fließgrenze erreicht wurde; sie hängt jedoch nicht davon ab, wie weit über diesen Punkt hinaus belastet wurde. Die Restspannungen, die nach der ursprünglichen Belastung verbleiben, sind sehr wohl von  $\mu$  abhängig [s. Gl. (5)], aber auch der Wiedereintritt des Fließens unter der Gegenbelastung erfolgt um so früher, je größer  $\mu$  war [s. Gl. (10)]. Damit ist gewissermaßen mehr Zeit vorhanden, um die bei größerem  $\mu$  vorhandenen größeren Restspannungen abzubauen.

Auch Gl. (11) scheint im wesentlichen gleichartig gebaut zu sein wie Gl. (4) und erweckt den Anschein, als ob es bei der Gegenbelastung, sofern einmal Fließen eingesetzt hat, ganz gleichgültig wäre, ob Restspannungen vorhanden waren oder nicht. Es ist jedoch zu beachten, daß, sofern  $\mu > \mu_0$  ist, nach dem eben Gesagten Gl. (11) schon früher gilt als Gl. (4). Erst wenn  $\mu$  dem Betrag nach den Wert  $\mu_0$  überschreitet, haben die beiden Gleichungen nichts mehr vor einander voraus, denn dann sind die Restspannungen bereits abgebaut\*.

3. Wir haben im vorigen Abschnitt zur Herstellung des ursprünglichen Zustands des Fachwerks wieder die Lastgruppe  $P$  verwendet. Dies ist nicht unbedingt notwendig; wir können vielmehr auch eine andere Lastgruppe  $Q$  in Form proportionaler Belastung aufbringen. Wir müssen nur voraussetzen, daß bei dieser Belastung wieder der Stab  $a$  als erster zum Fließen kommt und daß bis zum Ende des Belastungsvorganges kein weiterer Stab zu fließen beginnt. Bezeichnen wir den Lastfaktor jetzt mit  $\bar{\nu}$ , so ist, bei analoger Bezeichnung wie vorhin, die Kraft im Stab  $p$  am Ende der Wiederbelastung

$$\bar{S}_p = \bar{\nu} S_{pQ} - S_{pa} X_a^0. \quad (15)$$

Bei unbeschränkter Giltigkeit des Hookeschen Gesetzes hätten wir

$$\bar{S}_p^e = \bar{\nu} S_{pQ} + S_{pa} \bar{\nu} X_{aP} \quad (16)$$

Subtraktion der beiden Ausdrücke liefert die Restspannung, die für alle Stäbe verschwindet, wenn gilt:

$$\bar{\nu} = - \frac{X_a^0}{X_{aQ}^0}. \quad (17)$$

Es ergibt sich also ein ganz gleichartiger Ausdruck wie Gl. (14).

Man könnte natürlich als Gegenbelastung auch eine Belastung wählen, unter der irgendein anderer Stab  $b$ , der an Stelle von  $a$  als überzählig betrachtet werden könnte, zum Fließen kommt, und diesen Stab so lange bleibend verformen, bis nach Entlastung keine Restspannungen mehr zurückbleiben. Dann hat jedoch das Fachwerk nach der Entlastung nicht mehr die ursprüngliche Gestalt, denn es sind jetzt zwei Stablängen, die von  $a$  und die von  $b$ , bleibend verändert worden. Wir wollen dies hier jedoch nicht weiter verfolgen.

4. Wir wollen noch kurz den Fall betrachten, daß die plastische Verformung des Stabes  $a$  unter der Stabkraft  $X_a^0$  am Ende des Belastungsvorganges  $\mu P$  so weit ging,

\* W. Prager bringt in dem eingangs erwähnten Buch eine sehr übersichtliche geometrische Darstellung der Spannungszustände in einem einfach statisch unbestimmten Fachwerk, die auf den Russen Rzhanitzin zurückgeht. An Hand dieser Darstellung kann man die verschiedensten Belastungs- und Entlastungsvorgänge anschaulich verfolgen, und sie gab auch die Anregung zu den vorliegenden Betrachtungen. Für mehrfach statisch unbestimmte Tragwerke und mehrparametrische Belastungszustände verliert die Darstellung jedoch bald an Anschaulichkeit und die Belastungs- und Entlastungsvorgänge können dann nur mehr rechnerisch verfolgt werden.

daß dieser Stab nach Wegnahme der Belastung bloß infolge der Restspannung neuerlich zum Fließen kommt, diesmal bei der Stabkraft  $-X_a^0$ . Die übrigen Stäbe sollen elastisch geblieben sein. Der kleinste Wert des Faktors  $\mu$ , bei dem dies eintritt, sei mit  $\mu_0'$  bezeichnet und folgt aus Gl. (6)

$$X_a^r = X_a^0 - \mu_0' X_{aP} = -X_a^0, \quad (18)$$

zu

$$\mu_0' = \frac{2 X_a^0}{X_{aP}} = 2 \mu_0$$

[vgl. Gl. (3)]. Wir setzen also voraus, es sei  $\mu \geq 2 \mu_0$ . Dann gilt Gl. (5) nicht mehr, sondern die Restspannung in irgendeinem Stab  $p$  ist jetzt, da  $X_a^r = -X_a^0$  ist, gegeben durch

$$S_p^r = -S_{pa} X_a^0. \quad (19)$$

Bei der Gegenbelastung mit  $\bar{\mu} P$  kann nun der Stab  $a$  nichts mehr aufnehmen, er bleibt an der Fließgrenze  $-X_a^0$ . Somit ist die Stabkraft im Stab  $p$  gegeben durch\*

$$\bar{S}_p = \bar{\mu} S_{pP} - S_{pa} X_a^0. \quad (20)$$

Die nach Entlastung verbleibenden Restspannungen ergeben sich wieder, indem wir von dieser Gleichung die Gl. (12) abziehen. Die Bedingung, daß diese Restspannungen verschwinden, ist wiederum

$$\bar{\mu} = -\frac{X_a^0}{X_{aP}} = -\mu_0. \quad (21)$$

5. Wir wenden uns nun den zweifach statisch unbestimmten Fachwerken zu. Es wäre zur Beantwortung der Frage, mit der wir uns beschäftigen, gar nicht notwendig, immer, wie es oben geschehen ist, den allgemeinen Ausdruck für die Stabkraft in einem beliebigen Stab aufzuschreiben. Es würde genügen, bloß die Kräfte in den überzähligen Stäben zu berechnen und die Bedingung dafür aufzustellen, daß in diesen Stäben nach der zweiten Entlastung keine Restspannungen verbleiben. Gemäß Gl. (1) gibt es dann auch in den übrigen Stäben keine Restspannungen. Wir wollen jedoch in diesem Abschnitt noch nach der bisherigen Methode verfahren, da sie einen besseren Einblick in das Kräftespiel gibt. Erst im letzten Abschnitt wollen wir auf die etwas kürzere Art verfahren.

In dem nunmehr betrachteten zweifach statisch unbestimmten Fachwerk seien die beiden überzähligen Stäbe mit  $a$  und  $b$  bezeichnet. Wir betrachten zunächst den Fall, daß unter der Belastung  $\mu P$  nur der Stab  $a$  (bei der Stabkraft  $X_a$ ) fließe und fragen, ob die nach Entlastung verbleibenden Restspannungen durch eine Wiederbelastung von der Form  $\bar{\mu} P$  beseitigt werden können.

Solange noch alles elastisch ist, ist die Stabkraft gegeben durch

$$S_p^e = \mu S_{pP} + S_{pa} \mu X_{aP} + S_{pb} \mu X_{bP}. \quad (22)$$

Dies gilt so lange, bis  $\mu X_{aP} = X_a^0$  geworden ist, also bis der Lastfaktor den Wert

$$\mu_0 = \frac{X_a^0}{X_{aP}} \quad (23)$$

erreicht hat. In diesem Augenblick ist die Stabkraft

$$S_p = \mu_0 S_{pP} + S_{pa} X_a^0 + S_{pb} \mu_0 X_{bP}. \quad (24)$$

\* Es läßt sich zeigen daß unter den von uns getroffenen Voraussetzungen unter der Gegenbelastung kein weiterer Stab zum Fließen kommt.



Von jetzt ab verhält sich das Fachwerk wie ein einfach statisch unbestimmtes Tragwerk, das mit der wachsenden Belastung  $\mu P$  und mit der konstanten Kraft  $X_a^0$  im Stab  $a$  belastet ist. Wir denken uns für den Augenblick den Stab  $a$  durchschnitten und das verbleibende einfach statisch unbestimmte Grundsystem  $GS_1$  mit den Lasten  $P$  ( $\mu = 1$ ) belastet. Die dadurch im Stab  $b$  hervorgerufene Stabkraft nennen wir  $X_{bP}^1$ . Belasten wir nunmehr das gegebene, zweifach statisch unbestimmte Fachwerk mit der Intensität  $\mu P = (\mu_0 + \Delta\mu) P$ , so wirkt sich die Laststeigerung  $\Delta\mu P$  auf alle Stäbe mit Ausnahme von  $a$  aus und zwar als elastische Änderung der Stabkraft. Für den Stab  $p$  ist diese Änderung

$$\Delta S_p^e = \Delta\mu S_{pP} + S_{pb} \Delta\mu X_{bP}^1. \quad (25)$$

Dieser Wert überlagert sich der von der Belastung  $\mu_0 P$  herrührenden Stabkraft gemäß Gl. (24) und wir erhalten somit für  $\mu = \mu^0 + \Delta\mu$

$$S_p = \mu S_{pP} + S_{pa} X_a^0 + S_{pb} (\mu_0 X_{bP} + \Delta\mu X_{bP}^1). \quad (26)$$

(Dies gilt auch für den Stab  $a$ , denn es ist  $S_{aP} = S_{ab} = 0$ ,  $S_{aa} = 1$ .)

Die Entlastung geht nach Gl. (22) vor sich, die jetzt auch für  $\mu = \mu_0 + \Delta\mu$  als gültig zu betrachten ist, und wir erhalten für die Restspannung im Stab  $p$

$$S_p^r = S_{pa} (X_a^0 - \mu X_{aP}) + S_{pb} \Delta\mu (X_{bP}^1 - X_{bP}), \quad (27)$$

was nicht anderes bedeutet als [s. Gl. (1)]

$$S_p^r = S_{pa} X_a^r + S_{pb} X_b^r. \quad (28)$$

Wir wollen annehmen, daß diese Restspannungen alle im elastischen Bereich liegen und belasten neuerlich und zwar mit  $\mu P$ . Dann überlagern sich den Restspannungen zunächst elastische Spannungen von der Form der Gl. (22), wo bloß  $\mu$  durch  $\bar{\mu}$  zu ersetzen ist. Wir haben dann die Stabkraft

$$\bar{S}_p = S_p^r + \bar{S}_p^e = \bar{\mu} S_{pP} + S_{pa} [X_a^0 + (\bar{\mu} - \mu) X_{aP}] + S_{pb} (X_b^r + \bar{\mu} X_{bP}). \quad (29)$$

Nun soll wieder im Stab  $a$  Fließen eintreten, und zwar unter der Stabkraft  $-X_a^0$ . Dies wird für  $\bar{\mu} = \bar{\mu}_0$  der Fall sein, wenn

$$X_a^0 + (\bar{\mu}_0 - \mu) X_{aP} = -X_a^0$$

ist, und es ergibt sich wieder [vgl. Gl. (10)]

$$\bar{\mu}_0 = \mu - \frac{2 X_a^0}{X_{aP}} = \mu - 2 \mu_0 = \Delta\mu - \mu_0. \quad (30)$$

Belasten wir über diesen Wert hinaus, bis  $\bar{\mu} = \bar{\mu}_0 + \Delta\bar{\mu}$ , so bleibt im Stab  $a$  die Kraft konstant und gleich  $-X_a^0$ , während sich in den übrigen Stäben die Kräfte ändern, und zwar gemäß Gl. (25), wo jetzt  $\Delta\mu$  durch  $\Delta\bar{\mu}$  zu ersetzen ist. Wir haben dann

$$\bar{S}_p = \bar{\mu} S_{pP} - S_{pa} X_a^0 + S_{pb} (X_b^r + \bar{\mu}_0 X_{bP} + \Delta\bar{\mu} X_{bP}^1). \quad (31)$$

Wird nun gemäß Gl. (22) entlastet, wo  $\mu$  durch  $\bar{\mu} = \mu_0 + \Delta\bar{\mu}$  zu ersetzen ist, so verbleibt die Restspannung

$$\bar{S}_p^r = -S_{pa} (X_a^0 + \bar{\mu} X_{aP}) + S_{pb} (X_b^r - \Delta\bar{\mu} X_{bP} + \Delta\bar{\mu} X_{bP}^1). \quad (32)$$

Setzen wir für  $X_b^r$  nach Gl. (27) und (28) seinen Wert ein, dann ergibt sich

$$\bar{S}_a^r = -S_{pa} (X_a^0 + \bar{\mu} X_{aP}) + S_{pb} (\Delta\mu + \Delta\bar{\mu}) (X_{bP}^1 - X_{bP}). \quad (33)$$

Nun ist aber, unter Anwendung von Gl. (30),

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}_0 + \Delta\bar{\mu} = \Delta\mu - \mu_0 + \Delta\bar{\mu} = \Delta\mu + \Delta\bar{\mu} - \frac{X_a^0}{X_{aP}}.$$

Somit gilt für das erste Glied der Gl. (3)

$$X_a^c + \bar{\mu} X_{aP} = (\Delta\mu + \Delta\bar{\mu}) X_{aP}. \quad (34)$$

Wenn wir also

$$\bar{\mu} = - \frac{X_a^0}{X_{aP}} \quad (35)$$

wählen, dann verschwindet in Gl. (33) sowohl das erste als auch das zweite Glied; denn da  $X_{aP}$  sicherlich ungleich null ist (sonst könnte der Stab  $a$  nie an die Fließgrenze kommen), muß gemäß Gl. (34)  $\Delta\mu + \Delta\bar{\mu}$  verschwinden. Es sind daher die Restspannungen in allen Stäben gleich null und zwar für denselben Wert des Lastfaktors wie für das einfach statisch unbestimmte System.

6. Wir wollen nun annehmen, daß die Belastung  $\mu P$  des zweifach statisch unbestimmten Fachwerks so weit getrieben werde, bis die beiden überzähligen Stäbe  $a$  und  $b$  unter den Stabkräften  $X_a^0$  und  $X_b^0$  fließen. Diesmal sollen, wie schon am Anfang des Abschnittes 5 angedeutet, nur die Kräfte in den überzähligen Stäben berechnet werden, auf die es ja nach Gl. (1) allein ankommt. Sofern also bereits Fließen eingesetzt hat, ist

$$X_a = X_a^0, \quad X_b = X_b^0, \quad (36)$$

während bei unbeschränkt elastischem Verhalten gelten würde

$$X_a^e = \mu X_{aP}, \quad X_b^e = \mu X_{bP}. \quad (37)$$

Die Differenz ergibt die Restspannungen in den beiden überzähligen Stäben:

$$X_a^r = X_a^0 - \mu X_{aP}, \quad X_b^r = X_b^0 - \mu X_{bP}. \quad (38)$$

Lassen wir wieder die Gegenbelastung  $\bar{\mu} P$  einwirken, wobei wir annehmen, daß wiederum die Stäbe  $a$  und  $b$  fließen und zwar unter den Kräften  $-X_a^0$ , bzw.  $-X_b^0$ , und entlasten wir abermals, so verbleiben in den Stäben  $a$  und  $b$  die Restspannungen

$$\bar{X}_a^r = -(X_a^0 + \bar{\mu} X_{aP}), \quad \bar{X}_b^r = -(X_b^0 + \bar{\mu} X_{bP}). \quad (39)$$

Damit die Restspannungen in sämtlichen Stäben verschwinden, müßten diese beiden Werte gleich null sein. Damit der erste verschwindet, müßte gelten

$$\bar{\mu} = - \frac{X_a^0}{X_{aP}}. \quad (40)$$

Soll gleichzeitig auch der zweite verschwinden, müßte gelten

$$\frac{X_a^0}{X_{aP}} = \frac{X_b^0}{X_{bP}}. \quad (41)$$

Dies wird nun im allgemeinen nicht zutreffen. Denn haben z. B. die Stäbe  $a$  und  $b$  den gleichen Querschnitt und bestehen sie aus dem gleichen Material, so ist  $|X_a^0| = |X_b^0|$ . Das bedingt jedoch keineswegs, daß auch  $|X_{aP}| = |X_{bP}|$  ist. Wir kommen also zu dem Ergebnis, daß bei einem zweifach statisch unbestimmten Fachwerk, sofern unter der



Belastung  $\mu P$  zwei überzählige Stäbe zum Fließen gekommen sind, unter der einparametrischen Schar der Belastungszustände  $\mu P$  im allgemeinen keiner geeignet ist, die Restspannungen zu beseitigen.

Im allgemeinen Fall wird die Beseitigung der Restspannungen nur gelingen, wenn wir bei der Wiederbelastung zur Lastgruppe  $P$  eine zweite Lastgruppe  $Q$  hinzunehmen und die Wiederbelastung in der Form  $\bar{\mu}P + \bar{\nu}Q$  durchführen. Die Lastgruppe  $Q$  muß so gewählt werden, daß bei stetigem Anwachsen der Beträge von  $\mu$  und  $\nu$  schließlich in den Stäben  $a$  und  $b$  Fließen eintritt und zwar unter den Kräften  $-X_a^0$ , bzw.  $-X_b^0$ . Bei unbeschränkt elastischem Verhalten würde gelten

$$\bar{X}_a^e = \bar{\mu} X_{aP} + \bar{\nu} X_{aQ}, \quad \bar{X}_b^e = \bar{\mu} X_{bP} + \bar{\nu} X_{bQ}. \quad (42)$$

Dies von den Fließkräften  $-X_a^0$ , bzw.  $-X_b^0$  abgezogen, ergibt für die beiden überzähligen Stäbe die Restspannungen

$$X_a^r = -(X_a^0 + \mu X_{aP} + \nu X_{aQ}), \quad X_b^r = -(X_b^0 + \bar{\mu} X_{bP} + \bar{\nu} X_{bQ}). \quad (43)$$

Die Bedingung, daß diese beiden Werte verschwinden, liefert zwei lineare Gleichungen für  $\bar{\mu}$  und  $\bar{\nu}$ :

$$\begin{aligned} \bar{\mu} X_{aP} + \bar{\nu} X_{aQ} + X_a^0 &= 0, \\ \bar{\mu} X_{bP} + \bar{\nu} X_{bQ} + X_b^0 &= 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Sie liefern eine eindeutige Lösung, wenn die Determinante

$$\Delta = X_{aP} X_{bQ} - X_{bP} X_{aQ} \quad (45)$$

nicht verschwindet. Ist jedoch  $\Delta = 0$ , dann müssen, sollen Lösungen existieren, die beiden Gleichungen linear abhängig sein. Dann gilt aber

$$\frac{X_{aP}}{X_{bP}} = \frac{X_{aQ}}{X_{bQ}} = \frac{X_a^0}{X_b^0}, \quad (46)$$

woraus folgt

$$\frac{X_a^0}{X_{aP}} = \frac{X_b^0}{X_{bP}}. \quad (47)$$

Wir sind damit bei dem durch Gl. (41) ausgedrückten Sonderfall. Wir können dann in Gl. (44) eine Unbekannte beliebig wählen und die andere ausrechnen. Setzen wir etwa  $\nu = 0$ , so ergibt sich für  $\bar{\mu}$  der Wert gemäß Gl. (40). Wir benötigen also in diesem Fall die Lasten  $Q$  nicht.

Ist  $\Delta = 0$  und sind aber die Gl. (46) nicht erfüllt, dann haben die Gl. (44) keine Lösung und die betreffende Lastgruppe  $Q$  ist für unsere Zwecke ungeeignet.

Wir setzen nun wieder voraus, es sei  $\Delta \neq 0$  und nehmen an,  $\bar{\mu}^*$  und  $\bar{\nu}^*$  seien die Lösung der Gl. (44). Setzen wir

$$\kappa = \frac{\bar{\nu}^*}{\bar{\mu}^*}, \quad (48)$$

so folgt aus den Gl. (44)

$$\bar{\mu}^* = -\frac{X_a^0}{X_{aP} + \kappa X_{aQ}} = -\frac{X_b^0}{X_{bP} + \kappa X_{bQ}}. \quad (49)$$

Wir können dies so auffassen, daß wir damit die Gegenbelastung wieder auf eine einparametrische Schar von Belastungszuständen zurückgeführt haben, die allerdings

von der Form  $\bar{\mu} (P + \kappa Q)$  sind. Die Gl. (49) können als die den Gl. (40) und (41) entsprechenden Gleichungen aufgefaßt werden, jedoch müssen in unserem Fall die elastischen Stabkräfte in den Stäben  $a$  und  $b$  durch Hinzunahme der Lastgruppe  $Q$  gewissermaßen zurechtgerückt werden, damit die Gl. (41) erfüllt wird. Dies gibt einen Hinweis bezüglich des Weges, auf dem der Endwert der Wiederbelastung  $\bar{\mu}^* P + \bar{\nu}^* Q$  zu erreichen ist. Wenn wir die Beträge von  $\bar{\mu}$  und  $\bar{\nu}$  derart wachsen lassen, daß ihr Verhältnis stets gleich dem durch Gl. (48) gegebenen Wert  $\kappa$  ist, wenn wir also wieder streng proportionale Belastung durchführen, dann kommen wir jedenfalls zum Ziel. Die Wahl der Lastgruppe  $Q$  ist damit natürlich keineswegs eindeutig festgelegt und ist innerhalb der Grenzen, die aus den obigen Ausführungen hervorgehen, noch weitgehend frei. Wir erinnern in diesem Zusammenhang an das Ergebnis des Abschnitts 3, das zeigte, daß wir, um Restspannungen zu beseitigen, keineswegs an eine bestimmte Lastgruppe gebunden sind.

(Eingegangen am 21. September 1960)

## Über die Schwingungen des Zugseiles von Seilschwebbahnen

Von E. Czitary, Wien

Mit 17 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Bei Seilschwebbahnen mit Pendelbetrieb, deren Antrieb und Zugseilspannvorrichtung in der Talstation untergebracht sind, entstehen oft heftige Zugseilschwingungen, die zu Überschlagen des Zugseiles über das Tragseil führen können. Um zu einer Abschätzung der Überschlagsgefahr zu gelangen, ist es notwendig, die Schwingungsvorgänge in den einzelnen Seilfeldern in einem System von Differentialgleichungen zusammenzufassen. Zur Integration dieses Systems bedient man sich vorteilhaft einer Analogierechenanlage. Die gewonnenen Resultate liefern ein anschauliches Bild dafür, unter welchen Verhältnissen eine Überschlagsgefahr besteht.

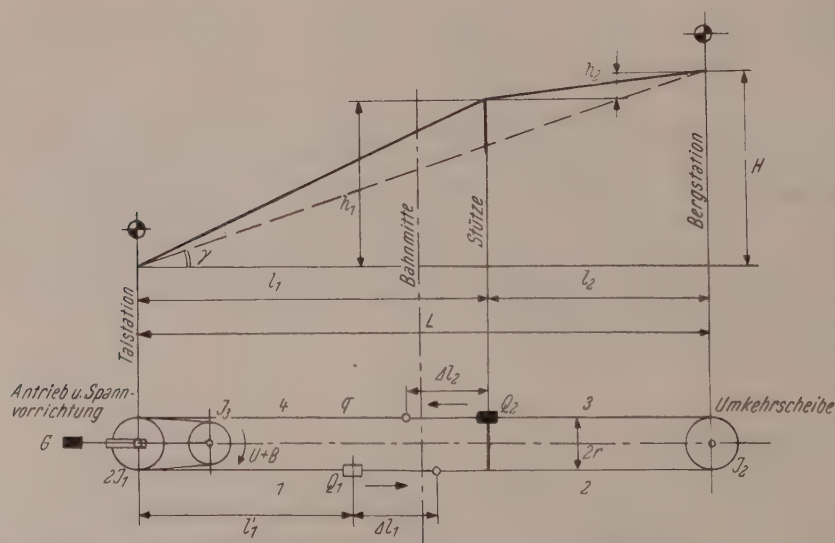


Abb. 1. Längenschnitt und Schema der Zugseilführung einer Seilschwebbahn mit Pendelbetrieb. Antriebswindwerk und Zugseilspannvorrichtung in der Talstation vereinigt. Dabei sei  $l_1 > l_2$ .



## I. Allgemeines

Bei Zugseilen von Seilschwebbahnen mit Pendelbetrieb werden oft stärkere Querschwingungen beobachtet, die mitunter sogar zu einem Überschlag des Zugseiles über das Trageisil führen können, was dann eine Betriebsstörung zur Folge hat.

Sehr anfällig sind in dieser Hinsicht Bahnanlagen mit einem nach oben nur wenig hohlen oder nach oben gewölbten Längenschnitt, großen Spannweiten zwischen den Stützen und einem in der Talstation mit der Zugseilspannvorrichtung vereinigtcm Antriebswindwerk (Abb. 1). Geht hier ein voller Wagen talwärts über die mittlere Stütze und wird die Bahn vom Antriebswindwerk aus gleichzeitig aus irgendwelchen Gründen abgebremst, so sind die Verhältnisse für einen Zugseilüberschlag besonders günstig. Eine rechnerische Untersuchung dieses Falles ist erwünscht, um unter Umständen schon beim Entwurf einer Seilschwebbahn Anhaltspunkte für die Möglichkeit eines Zugseilüberschlages gewinnen zu können.

## II. Vereinfachende Annahmen

Um zu brauchbaren Ergebnissen zu gelangen, muß die rechnerische Untersuchung das ganze Zugseilssystem erfassen. Dadurch ist die Aufgabe kompliziert und es wird die Einführung einiger vereinfachender Annahmen notwendig. Die Vereinfachungen werden aber so gewählt, daß hiedurch die Ergebnisse auf der ungünstigen Seite liegen. Diese Annahmen sind nun folgende:

1. Fährt ein Wagen über die Stütze, so soll sich gleichzeitig und mindestens im gleichen Ausmaß wie seine Zugwirkung auch die Umfangskraft an der Antriebscheibe ändern.
2. Ein Auspendeln der Wagenkasten in der Längsrichtung, welches während der schwingenden Bewegung des Zugseiles eintreten könnte, bleibt außer Betracht. Oft sind an den Wagen Schwingungsdämpfer vorhanden, die das Auspendeln teilweise unterdrücken.
3. Bei den Querschwingungen des Zugseiles wird angenommen, daß dieses die dem statischen Fall entsprechende Form beibehält, welche genähert eine quadratische Parabel ist.
4. Bei den gleichzeitig auftretenden Längsschwingungen des Zugseiles wird dessen Masse auf jene der Wagen und der Seilscheiben aufgeteilt.
5. Wegen der stets schlanken Seilkurven werden die Wagenwege näherungsweise auf die Feldsehnern bezogen.
6. Irgendwelche Dämpfungen bleiben unberücksichtigt.

## III. Vorzeichenwahl

Spannkrafterhöhungen im Zugseil und damit zusammenhängende Durchhangs- und Längenänderungen des Zugseiles in einem Seilfeld werden positiv gezählt.

## IV. Vereinfachte Darstellung der Querschwingungen in einem Seilfeld

Tritt in dem Seilfeld (Abb. 2), in dessen Mitte die Zugseilspannkraft  $S_m$  herrschen möge, eine Spannkraft-erhöhung um  $\Delta S$  ein, welche durch die bewegliche Lagerung des Zugseiles auf den Stützenrollen ermöglicht ist, dann nimmt die Horizontal-komponente der Seilspannkraft  $H = S_m \cos \gamma$  den neuen Wert  $H + \Delta H = (S_m + \Delta S) \cos \gamma$  an und es vermindern sich die Durchhänge  $z$  um  $\Delta z$ . Ist  $q$  das Gewicht der

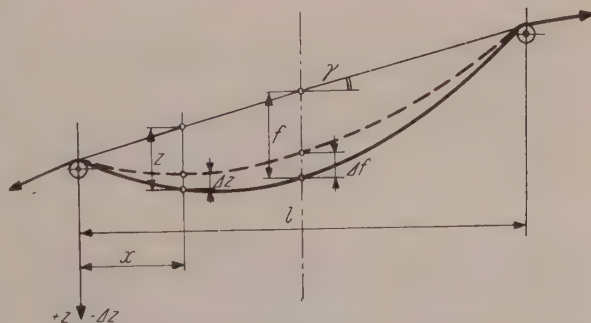


Abb. 2 Querschwingungen in einem Seilfeld

Längeneinheit des Seiles, so kann man für ein Seilelement, dessen Grundrißprojektion  $dx$  sein soll, die Bewegungsgleichung in folgender Form anschreiben:

$$\frac{q}{g} \frac{dx}{\cos \gamma'} \frac{\partial^2 (z - \Delta z)}{\partial t^2} = (H + \Delta H) d \frac{\partial (z - \Delta z)}{\partial x} + q \frac{dx}{\cos \gamma'}.$$

Darin ist  $\gamma'$  der Winkel, den das betrachtete Seilelement mit der Waagrechten einschließt und der bei nicht sehr steilen Seilfeldern unbedenklich durch den Sehnwinkel  $\gamma$  des Feldes ersetzt werden kann. Bezeichnen wir demgemäß mit  $q' = \frac{q}{\cos \gamma'}$ , dann nimmt obige Gleichung die Form an

$$\frac{q'}{g} \frac{\partial^2 (z - \Delta z)}{\partial t^2} = (H + \Delta H) \frac{\partial^2 (z - \Delta z)}{\partial x^2} + q'.$$

Daraus folgt für ein ruhendes Seil, da in diesem Fall die linke Seite,  $\Delta H$  und  $\Delta z$  Null sind, die bekannte Gleichung

$$q' = -H \frac{d^2 z}{dx^2}.$$

Diese führt zu einem Durchhang in der Feldmitte vom Betrag

$$f = \frac{q' l^2}{8 H}. \quad (1)$$

Wir können nun auch die während der Schwingungen des Seiles zu einem beliebigen Zeitpunkt entstehende Seilkurve als Kurve eines ruhenden Seiles mit der gedachten, über die Feldweite veränderlichen Belastung

$$q^* = - (H + \Delta H) \frac{\partial^2 (z - \Delta z)}{\partial x^2} = q' - \frac{q'}{g} \frac{\partial^2 (z - \Delta z)}{\partial t^2} = q' + \frac{q'}{g} \frac{\partial^2 \Delta z}{\partial t^2}$$

auffassen. Da aber den vereinfachenden Annahmen gemäß die Schwingungskurve des Seiles jener vor Beginn des Schwingungsvorganges ähnlich sein soll, wird  $q^*$  näherungsweise durch eine über die Feldweite konstante Belastung

$$q_0^* \doteq q' + \eta \frac{q'}{g} \frac{d^2 \Delta f}{dt^2}$$

derart ersetzt, daß sich für  $q^*$  und  $q_0^*$  in Feldmitte gleiche Durchhänge ergeben. Der zu diesem Zweck eingeführte Faktor  $\eta$  wäre bei einer ungefähr parabolischen Verteilung der Belastung  $\frac{q'}{g} \frac{\partial^2 \Delta z}{\partial t^2}$  über die Feldweite  $\sim 0,83$ . Damit entsteht für den Durchhang in der Mitte des Seilfeldes während des Schwingungsvorganges

$$f - \Delta f = \frac{q_0^* l^2}{8 (H + \Delta H)} = \frac{\left( q' + \eta \frac{q'}{g} \frac{d^2 \Delta f}{dt^2} \right) l^2}{8 (H + \Delta H)}.$$

Durch Umformung ergibt sich daraus

$$\eta \frac{q'}{g} \frac{d^2 \Delta f}{dt^2} = \frac{8 (H + \Delta H) (f - \Delta f)}{l^2} - q'.$$

Betrachtet man nur kleinere Schwingungen, dann kann man, wenn man auf der rechten Seite ausmultipliziert, das Produkt  $\Delta H \Delta f$  wegen seiner Kleinheit streichen. Berücksichtigt man auch noch (1), dann erhält man schließlich als Bewegungsgleichung für die Querschwingungen in einem Seilfeld



$$\eta \frac{q'}{g} \frac{d^2 \Delta f}{dt^2} = \frac{8 (\Delta H f - H \Delta f)}{l^2} . \quad (2)$$

Die Seillänge in einem unter dem Winkel  $\gamma$  geneigten Seilfeld beträgt bei einem ruhenden Seil<sup>1</sup>

$$\lambda \doteq \frac{l}{\cos \gamma} + \frac{8 f^2}{3 l} \cos^3 \gamma . \quad (3)$$

Vermindert sich der Durchhang zufolge des Schwingungsvorganges um  $\Delta f$ , dann gilt

$$\lambda - \Delta \lambda \doteq \frac{l}{\cos \gamma} + \frac{8 (f - \Delta f)^2}{3 l} \cos^3 \gamma .$$

Multipliziert man rechts aus, streicht aus den gleichen Gründen wie zuvor  $\Delta f^2$  und berücksichtigt man noch (3), so ergibt sich

$$\Delta \lambda = \frac{16 f}{3 l} \Delta f \cos^3 \gamma . \quad (4)$$

als Verkürzung der Seillänge zufolge einer Durchhangsverminderung.

### V. Vereinfachte Darstellung der Querschwingungen in einem Seilfeld mit veränderlicher Länge

Bewegt sich ein Wagen zwischen den beiden Stützen eines Seilfeldes, dann nimmt die eine Zugseilspannweite, die von der ersten Stütze bis zum Wagen reicht, dauernd zu und die andere Zugseilspannweite, die sich vom Wagen bis zur zweiten Stütze erstreckt, dauernd ab. Wir betrachten in der Folge nur die wachsende Zugseilspannweite, weil sich für die abnehmende ganz gleichartige Beziehungen ergeben.

Hat zu Beginn des Schwingungsvorganges der Wagen den Abstand  $l'$  von der ersten Stütze, dann beträgt zu einem beliebigen Zeitpunkt der Abstand  $l' + \Delta l$ . Ist, ermöglicht durch die Lagerung des Zugseiles auf den Stützenrollen, so wie früher auch eine Spannkrafterhöhung gegenüber dem Anfangszustand eingetreten, dann kann analog zu IV. für den Durchhang in der Mitte der betrachteten Zugseilspannweite geschrieben werden

$$f - \Delta f = \frac{\left( q' + \eta \frac{q'}{g} \frac{d^2 \Delta f}{dt^2} \right) (l' + \Delta l)^2}{8 (H + \Delta H)} .$$

Durch Umformung entsteht daraus

$$\eta \frac{q'}{g} \frac{d^2 \Delta f}{dt^2} = \frac{8 (H + \Delta H) (f - \Delta f)}{(l' + \Delta l)^2} - q' .$$

Vervielfacht man Zähler und Nenner des ersten Ausdruckes auf der rechten Seite mit  $(l - \Delta l)^2$  und multipliziert Zähler und Nenner für sich aus, dann kann man wegen ihrer Kleinheit alle Glieder streichen, welche Produkte der  $\Delta$  oder höhere als die erste Potenz eines  $\Delta$  enthalten. Mit Berücksichtigung von (1) gelangt man so schließlich zur vereinfachten Bewegungsgleichung für die Querschwingungen in einer Zugseilspannweite mit veränderlicher Länge

$$\eta \frac{q'}{g} \frac{d^2 \Delta f}{dt^2} = \frac{8 (\Delta H f - H \Delta f)}{l'^2} - \frac{16 H f}{l'^3} \Delta l . \quad (5)$$

<sup>1</sup> Czitary E.: Seilschwebbahnen S. 38, Wien: Springer-Verlag, 1951.

Für die Seillänge in einem solchen Feld gilt, wenn sich während des Schwingungsvorganges die Spannweite um  $\Delta l$  vergrößert und der Durchhang zufolge der Spannkrafterhöhung um  $\Delta f$  vermindert

$$\lambda - \Delta \lambda \doteq \frac{l' + \Delta l}{\cos \gamma} + \frac{8(f - \Delta f)^2}{3(l' + \Delta l)} \cos^3 \gamma.$$

Denkt man sich Zähler und Nenner des zweiten Ausdruckes auf der rechten Seite mit  $l' - \Delta l$  vervielfacht und bei Durchführung der Multiplikationen auch hier die Glieder gestrichen, welche Produkte oder höhere Potenzen der  $\Delta$  enthalten, dann ergibt sich bei Berücksichtigung von (3)

$$\Delta \lambda = \frac{16f}{3l'} \Delta f \cos^3 \gamma - \frac{\Delta l}{\cos \gamma} + \frac{8f^2}{3l'^2} \Delta l \cos^3 \gamma. \quad (6)$$

## VI. Aufstellung der Bewegungsgleichungen für das ganze Zugseilssystem

Man beginnt dabei zweckmäßig bei der Talstation und geht von dort im Umlaufsinn des Zugseiles weiter (vgl. Abb. 1).

### Feld 1

Dieses reicht von der Talstation bis zum Wagen  $Q_1$ . Für die Querschwingungen gilt die Gleichung

$$\eta \frac{q'}{g} \Delta \ddot{f}_1 = \frac{8(\Delta H_1 f_1 - H_1 \Delta f_1)}{l_1'^2} - \frac{16 H_1 f_1}{l_1'^3} \Delta l_1, \quad (7)$$

ferner für die Längenänderung des Zugseiles zufolge der Querschwingungen und der Vergrößerung der Spannweite um  $\Delta l_1$

$$\Delta \lambda_1^0 = \frac{16 f_1}{3 l_1'} \Delta f_1 \cos^3 \gamma_1' - \frac{\Delta l_1}{\cos \gamma_1'} + \frac{8 f_1^2}{3 l_1'^2} \Delta l_1 \cos^3 \gamma_1'.$$

Setzt man

$$\Delta \lambda_1' = \frac{16 f_1}{3 l_1'} \Delta f_1 \cos^3 \gamma_1', \quad (8)$$

so kann man auch schreiben

$$\Delta \lambda_1^0 = \Delta \lambda_1' - \left(1 - \frac{8 f_1^2}{3 l_1'^2} \cos^4 \gamma_1'\right) \frac{\Delta l_1}{\cos \gamma_1'}. \quad (8a)$$

Bezeichnet  $E_s$  den Elastizitätsmodul des Zugseiles und  $F_s$  seinen metallischen Querschnitt, dann beträgt seine elastische Dehnung im Feld 1 zufolge der Spannkrafterhöhung  $\Delta S_1 = \frac{\Delta H_1}{\cos \gamma_1'}$

$$\Delta \lambda_1'' \doteq \frac{\Delta H_1 (l_1' + \Delta l_1)}{E_s F_s \cos^2 \gamma_1'} \doteq \frac{\Delta H_1 l_1'}{E_s F_s \cos^2 \gamma_1'}, \quad (9)$$

wenn man das Produkt  $\Delta H_1 \Delta l_1$  wieder wegen seiner Kleinheit vernachlässigt.

Vom Zugseil sei zu einem beliebigen Zeitpunkt gegenüber dem Beginn des Schwingungsvorganges ein Stück von der Länge  $x_1$  aus der Talstation ausgelaufen. Es gilt demnach zwischen den Seillängen im Feld 1 zu diesem Zeitpunkt und zu Beginn des Schwingungsvorganges der Zusammenhang



$$\lambda_1 + x_1 + \Delta\lambda_1'' = \lambda_1 - \Delta\lambda_1^0 \text{ oder } x_1 + \Delta\lambda_1'' = -\Delta\lambda_1^0, \text{ bzw.}$$

$$x_1 + \Delta\lambda_1'' = -\Delta\lambda_1' + \left(1 - \frac{8f_1^2}{3l_1'^2} \cos^4 \gamma_1'\right) \frac{\Delta l_1}{\cos \gamma_1'}.$$

Daraus ergibt sich

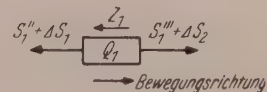
$$\Delta l_1 = \frac{x_1 + \Delta\lambda_1' + \Delta\lambda_1''}{1 - \frac{8f_1^2}{3l_1'^2} \cos^4 \gamma_1'} \cos \gamma_1'. \quad (10)$$

Dadurch nimmt Gl. (7) die Form an

$$\eta \frac{q'}{g} \Delta \ddot{f}_1 = \frac{8(\Delta H_1 f_1 - H_1 \Delta f_1)}{l_1'^3} - \frac{16 H_1 f_1}{l_1'^3} \frac{x_1 + \Delta\lambda_1' + \Delta\lambda_1''}{1 - \frac{8f_1^2}{3l_1'^2} \cos^4 \gamma_1'} \cos \gamma_1'. \quad (11)$$

Wagen  $Q_1$

Auf ihn wirken die in Abb. 3 angegebenen Kräfte, wobei unter  $S_1''$  und  $S_1'''$  jene zu verstehen sind, die vor Beginn des Schwingungsvorganges vorhanden waren.  $Z_1 = S_1''' - S_1''$  ist dann die für den Wagen  $Q_1$  notwendig gewesene Zugkraft. Im Hinblick auf seine durch  $\Delta l_1$  zu einem beliebigen Zeitpunkt gekennzeichnete Stellung lautet die Bewegungsgleichung, wenn zum Wagen das anteilige Zugseil zugeschlagen wird (vgl. Abb. 1).



$$\left[ \frac{q'(l_1' + \Delta l_1)}{2g} + \frac{Q_1}{g} + \frac{q'(l_1 - l_1' - \Delta l_1 + l_2)}{2g} \right] \frac{\Delta \ddot{l}_1}{\cos \gamma_1'} = S_1''' + \Delta S_2 - S_1'' - \Delta S_1 - Z_1 \quad (12)$$

Abb. 3. Kräftewirkungen am bergwärts fahrenden Wagen  $Q_1$

und nach Vereinfachung

$$\left[ \frac{q'(l_1 + l_2)}{2g} + \frac{Q_1}{g} \right] \frac{\Delta \ddot{l}_1}{\cos \gamma_1'} = \Delta S_2 - \Delta S_1.$$

Führt man darin für  $\Delta l_1$  den Ausdruck (10) ein und ersetzt auch  $\Delta S_1$  und  $\Delta S_2$  durch die betreffenden Beziehungen, dann ergibt sich

$$\left[ \frac{q'(l_1 + l_2)}{2g} + \frac{Q_1}{g} \right] \frac{\ddot{x}_1 + \Delta \ddot{\lambda}_1 + \Delta \ddot{\lambda}_1''}{1 - \frac{8f_1^2}{3l_1'^2} \cos^4 \gamma_1'} = \frac{\Delta H_2}{\cos \gamma_2} - \frac{\Delta H_1}{\cos \gamma_1'}. \quad (13)$$

Feld 2

Da der Wagen  $Q_1$  sich nahe genug der Stütze befindet, werden die sich zwischen ihm und der Stütze ausbildenden Querschwingungen des Zugseiles kaum ins Gewicht fallen. Für die Querschwingungen im Feld 2 gilt die Beziehung

$$\eta \frac{q'}{g} \Delta \ddot{f}_2 = \frac{8(\Delta H_2 f_2 - H_2 \Delta f_2)}{l_2^3} \quad (14)$$

und für die Längenänderungen des Zugseiles zufolge der Querschwingungen, sowie für dessen elastische Dehnung

$$\Delta \lambda_2' = \frac{16f_2}{3l_2^2} \Delta f_2 \cos^3 \gamma_2 \text{ und} \quad (15)$$

$$\Delta \lambda_2'' = \frac{\Delta H_2 (l_1 - l_1' - \Delta l_1 + l_2)}{E_s F_s \cos^2 \gamma_2} = \frac{\Delta H_2 (l_1 - l_1' + l_2)}{E_s F_s \cos^2 \gamma_2}. \quad (16)$$

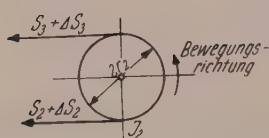


Abb. 4. Kräftewirkungen an der Umkehrscheibe in der Bergstation

#### Umkehrscheiben der Bergstation

Auf diese wirken die in Abb. 4 eingetragenen Kräfte, wobei  $S_2$  und  $S_3$  wieder jene darstellen, die vor Beginn des Schwingungsvorganges vorhanden waren. Annähernd gilt dabei  $S_2 = S_3$ . Für die Bewegungsgleichung der Umkehrscheibe einschließlich des zugeschlagenen anteiligen Zugseiles ergibt sich

$$\left[ \frac{q' (l_1 - l_1' - \Delta l_1 + l_2)}{2g} + \frac{J_2}{r_2^2} + \frac{q' (l_2 + \Delta l_2)}{2g} \right] \left( \frac{\Delta \ddot{l}_1}{\cos \gamma_1'} + \Delta \ddot{\lambda}_2' + \Delta \ddot{\lambda}_2'' \right) = S_3 + \Delta S_3 - S_2 - \Delta S_2.$$

Innerhalb der eckigen Klammern auf der linken Seite kann man ohne nennenswerten Fehler  $\Delta l_1 \sim \Delta l_2$  annehmen. Dadurch vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\left[ \frac{q' (l_1 - l_1' + 2 l_2)}{2g} + \frac{J_2}{r_2^2} \right] \left( \frac{\Delta \ddot{l}_1}{\cos \gamma_1'} + \Delta \ddot{\lambda}_2' + \Delta \ddot{\lambda}_2'' \right) = \Delta S_3 - \Delta S_2. \quad (17)$$

Mit dem Ausdruck (10) für  $\Delta l_1$  und den  $\Delta S_2$  und  $\Delta S_3$  entsprechenden Beziehungen erhält man schließlich aus (17)

$$\left[ \frac{q' (l_1 - l_1' + 2 l_2)}{2g} + \frac{J_2}{r_2^2} \right] \left( \frac{\ddot{x}_1 + \Delta \ddot{\lambda}_1' + \Delta \ddot{\lambda}_1''}{1 - \frac{8 f_1^2}{3 l_1'^2} \cos^4 \gamma_1'} + \Delta \ddot{\lambda}_2' + \Delta \ddot{\lambda}_2'' \right) = \frac{\Delta H_3 - \Delta H_2}{\cos \gamma_2}. \quad (18)$$

#### Feld 3

Für die Querschwingungen kann man schreiben

$$\eta \frac{q'}{g} \Delta f_3'' = \frac{8 (\Delta H_3 f_3 - H_3 \Delta f_3)}{l_2^2} \quad (19)$$

und für die Längenänderungen des Zugseiles zufolge der Querschwingungen, sowie für die elastische Dehnung desselben

$$\Delta \lambda_3' = \frac{16 f_3}{3 l_2} \Delta f_3 \cos^3 \gamma_2 \quad \text{und} \quad (20)$$

$$\Delta \lambda_3'' = \frac{\Delta H_3 (l_2 + \Delta l_2)}{E_s F_s \cos^2 \gamma_2} = \frac{\Delta H_3 l_2}{E_s F_s \cos^2 \gamma_2}. \quad (21)$$

#### Wagen $Q_2$

Die auf ihn wirkenden Kräfte sind aus Abb. 5 ersichtlich, wobei wie an den anderen betrachteten Stellen die Kräfte  $S_4'$  und  $S_4''$  jene vor Beginn des Schwingungsvorganges, hier also vor dem Stützenübergang des Wagens bedeuten.  $Z_2 = S_4' - S_4''$  ist wieder die dabei für den Wagen notwendig gewesene Zugkraft. Unter Bedachtnahme auf seine zu einem beliebigen Zeitpunkt durch  $\Delta l_2$  bestimmte Stellung erhält die Bewegungsgleichung die nachfolgende Form, wobei hier ebenfalls so wie früher zum Wagen das anteilige Zugseil hinzugefügt ist,

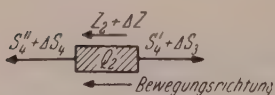


Abb. 5. Kräftewirkungen am talwärts fahrenden Wagen  $Q_2$

$$\left[ \frac{q' (l_2 + \Delta l_2)}{2g} + \frac{Q_2}{g} + \frac{q' (l_1 - \Delta l_2)}{2g} \right] \frac{\Delta \ddot{l}_2}{\cos \gamma_1} = S_4'' + \Delta S_4 - S_4' - \Delta S_3 + Z_2 + \Delta Z.$$

$\Delta Z$  stellt darin die durch die Neigungsänderung der Fahrbahn beim Stützenübergang hervorgerufene Vermehrung der Zugwirkung des Wagens  $Q_2$  dar, welche zufolge ihres nahezu plötzlichen Auftretens maßgebend an der Erzeugung des Schwingungsvorganges beteiligt ist. Sind  $\psi_o$  und  $\psi_u$  die für die Zugwirkung maßgebenden Bahnneigungswinkel ober- und unterhalb der Stütze, dann gilt

$$\Delta Z = Q_2 (\sin \psi_u - \sin \psi_o). \quad (22)$$

Durch Vereinfachung geht die Bewegungsgleichung für den Wagen  $Q_2$  in

$$\left[ \frac{q' (l_1 + l_2)}{2g} + \frac{Q_2}{g} \right] \frac{\Delta \ddot{l}_2}{\cos \gamma_1} = \Delta S_4 - \Delta S_3 + \Delta Z \quad (23)$$

über. Da nun

$$\frac{\Delta l_2}{\cos \gamma_1} = \frac{\Delta l_1}{\cos \gamma_1' (\gamma_1')} + \Delta \lambda_2' + \Delta \lambda_2'' + \Delta \lambda_3' + \Delta \lambda_3'' \quad (24)$$

sein muß, erhalten wir schließlich unter Berücksichtigung des Ausdruckes (10) für  $\Delta l_1$  und Ersetzung von  $\Delta S_3$  und  $\Delta S_4$  durch die betreffenden Beziehungen statt (23) die Gleichung

$$\begin{aligned} \left[ \frac{q' (l_1 + l_2)}{2g} + \frac{Q_2}{g} \right] \left( \frac{\ddot{x}_1 + \Delta \ddot{\lambda}_1' + \Delta \ddot{\lambda}_1''}{1 - \frac{8 f_1^2}{3 l_1'^2} \cos^4 \gamma_1'} + \Delta \ddot{\lambda}_2' + \Delta \ddot{\lambda}_2'' + \Delta \ddot{\lambda}_3' + \Delta \ddot{\lambda}_3'' \right) = \\ = \frac{\Delta H_4}{\cos \gamma_1} - \frac{\Delta H_3}{\cos \gamma_3} + \Delta Z. \end{aligned} \quad (25)$$

#### Feld 4

Die in dem kurzen Zugseilstück  $\Delta l_2$  zwischen der Stütze und dem Wagen  $Q_2$  etwa auftretenden Querschwingungen des Zugseiles können wegen ihrer Kleinheit vernachlässigt werden. Für die im Bereich zwischen dem Wagen und der Talstation entstehenden Querschwingungen gilt die Gleichung

$$\eta \frac{q'}{g} \Delta \ddot{f}_4 = \frac{8 (\Delta H_4 f_4 - H_4 \Delta f_4)}{l_1^2} + \frac{16 H_4 f_4}{l_1^3} \Delta l_2. \quad (26)$$

Ferner hat man für die Längenänderung des Zugseiles zufolge der Querschwingungen und der Verkleinerung der Spannweite um  $\Delta l_2$  zu schreiben

$$\Delta \lambda_4^0 = \frac{16 f_4}{3 l_1} \Delta f_4 \cos^3 \gamma_1 + \frac{\Delta l_2}{\cos \gamma_1} - \frac{8 f_4^2}{3 l_1^2} \Delta l_2 \cos^3 \gamma_1.$$

Bezeichnet man in Übereinstimmung mit dem Feld 1 als

$$\Delta \lambda_4' = \frac{16 f_4}{3 l_1} \Delta f_4 \cos^3 \gamma_1, \quad (27)$$

so gelangt man zum Ausdruck

$$\Delta \lambda_4^0 = \Delta \lambda_4' + \left( 1 - \frac{8 f_4^2}{3 l_1^2} \cos^4 \gamma_1 \right) \frac{\Delta l_2}{\cos \gamma_1}. \quad (28)$$



Für die elastische Dehnung des Seiles ergibt sich

$$\Delta \lambda_4'' = \frac{\Delta H_4 (l_1 - \Delta l_2)}{E_s F_s \cos^2 \gamma_1} = \frac{\Delta H_4 l_1}{E_s F_s \cos^2 \gamma_1}. \quad (29)$$

Setzt man in (26) für  $\Delta l_2$  den Wert aus (24) ein, so kommt man schließlich zu

$$\eta \frac{q'}{g} \Delta \ddot{f}_4 = \frac{8 (\Delta H_4 f_4 - H_4 \Delta f_4)}{l_1^2} + \frac{16 H_4 f_4}{l_1^3} \left( \frac{x_1 + \Delta \lambda_1' + \Delta \lambda_1''}{1 - \frac{8 f_1^2}{3 l_1'^2} \cos^4 \gamma_1'} + \Delta \lambda_2' + \Delta \lambda_2'' + \Delta \lambda_3' + \Delta \lambda_3'' \right) \cos \gamma_1. \quad (30)$$

#### Antrieb und Zugseilspannvorrichtung

Die am Antrieb und an der Zugseilspannvorrichtung wirksamen Kräfte zeigt die Abb. 6.  $S_4'''$  und  $S_1'$  sind hier gleichfalls jene, die vor Beginn des Schwingungsvorganges vorhanden waren. Dabei ist  $U = S_1' - S_4'''$  die vorhanden gewesene Umfangskraft an der Antriebscheibe.

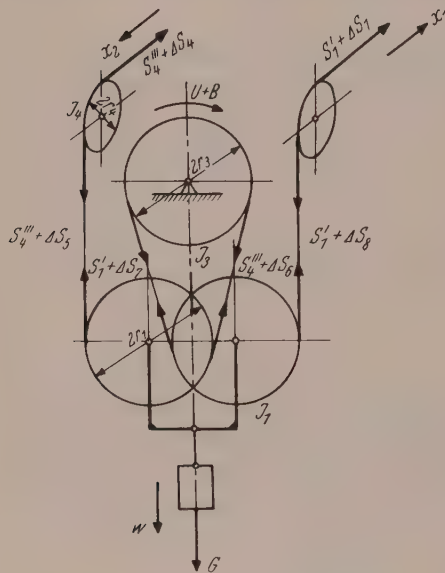


Abb. 6. Kräftewirkungen am Antrieb und an der Zugseilspannvorrichtung in der Talstation

Vom Zugseil sei zu einem beliebigen Zeitpunkt gegenüber dem Beginn des Schwingungsvorganges ein Stück von der Länge  $x_2$  in die Talstation eingelaufen. Es gilt demnach zwischen den Seillängen im Feld 4 zu dem genannten beliebigen Zeitpunkt und zu Beginn des Schwingungsvorganges der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \lambda_4 - x_2 + \Delta \lambda_4'' &= \lambda_4 - \Delta \lambda_4^0 \\ \text{oder } -x_2 + \Delta \lambda_4'' &= -\Delta \lambda_4^0, \text{ bzw.} \\ -x_2 + \Delta \lambda_4'' &= -\Delta \lambda_4' - \\ &= \left( 1 - \frac{8 f_4^2}{3 l_1^2} \cos^4 \gamma_1 \right) \frac{\Delta l_2}{\cos \gamma_1}. \end{aligned}$$

Daraus entsteht

$$\Delta l_2 = \frac{x_2 - \Delta \lambda_4' - \Delta \lambda_4''}{1 - \frac{8 f_4^2}{3 l_1^2} \cos^4 \gamma_1} \cos \gamma_1. \quad (31)$$

Diese Gleichung gestattet zusammen mit (10) und (24) einen Zusammenhang zwischen  $x_1$  und  $x_2$  herzustellen. Ein zweiter Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen ergibt sich aus folgender Überlegung. Senkt sich bei der dargestellten Anordnung von Antrieb und Zugseilspannvorrichtung das Spanngewicht um den Betrag  $w$ , dann besteht zwischen dem zugehörigen Einlaufstück  $x_2$  des Zugseiles und seinem entsprechenden Auslaufstück  $x_1$  die Beziehung

$$x_2 = x_1 + 4w. \quad (32)$$

Hiebei bewegt sich ein Punkt des Umfanges der Antriebscheibe um das Stück

$$y = x_1 + 2w = x_2 - 2w. \quad (33)$$

*Ablenkscheibe beim Seileinlauf*

Es gilt die Bewegungsgleichung

$$\left[ \frac{q' (l_1 - \Delta l_2)}{2g} + \frac{J_4}{r_4^2} \right] \ddot{x}_2 = S_4''' + \Delta S_5 - S_4''' - \Delta S_4$$

und nach Vereinfachung

$$\left[ \frac{q' (l_1 - \Delta l_2)}{2g} + \frac{J_4}{r_4^2} \right] \ddot{x}_2 = \Delta S_5 - \Delta S_4. \quad (34)$$

*1. Spannscheibe der Zugseilspannvorrichtung*

$$\frac{J_1}{r_1^2} (\ddot{x}_2 - \ddot{w}) = S_4''' + \Delta S_6 - S_4''' - \Delta S_5,$$

woraus

$$\frac{J_1}{r_1^2} (\ddot{x}_2 - \ddot{w}) = \Delta S_6 - \Delta S_5. \quad (35)$$

*Antriebscheibe*

Die auf diese außer der ursprünglichen Umfangskraft (Bremskraft)  $U$  wirkende Bremskraft  $B$  tritt annahmegemäß gleichzeitig mit  $\Delta Z$  des Wagens  $Q_2$  auf. Es muß  $B > \Delta Z$  sein, wenn die Bahn allmählich zum Stillstand gelangen soll.  $B$  ist ebenso wie  $\Delta Z$  maßgebend für die Entstehung der Zugseilschwingungen. Es ergibt sich

$$\frac{J_3}{r_3^2} (\ddot{x}_2 - 2 \ddot{w}) = S_1' + \Delta S_7 - U - B - S_4''' - \Delta S_6,$$

was sich unter Berücksichtigung des Ausdruckes für  $U$  zu

$$\frac{J_3}{r_3^2} (\ddot{x}_2 - 2 \ddot{w}) = \Delta S_7 - \Delta S_6 - B \quad (36)$$

vereinfacht.

*2. Spannscheibe der Zugseilspannvorrichtung*

$$\frac{J_1}{r_1^2} (\ddot{x}_2 - 3 \ddot{w}) = S_1' + \Delta S_8 - S_1' - \Delta S_7,$$

woraus

$$\frac{J_1}{r_1^2} (\ddot{x}_2 - 3 \ddot{w}) = \Delta S_8 - \Delta S_7. \quad (37)$$

*Ablenkscheibe beim Auslauf*

Es gilt die Bewegungsgleichung

$$\left[ \frac{J_4}{r_4^2} + \frac{q' (l_1' + \Delta l_1)}{2g} \right] (\ddot{x}_2 - 4 \ddot{w}) = S_1' + \Delta S_1 - S_1' - \Delta S_8$$

und nach Vereinfachung

$$\left[ \frac{J_4}{r_4^2} + \frac{q' (l_1' + \Delta l_1)}{2g} \right] (\ddot{x}_2 - 4 \ddot{w}) = \Delta S_1 - \Delta S_8. \quad (38)$$

*Zusammenfassung der Bewegungsgleichungen für den Antrieb und die Zugseilspannvorrichtung*

Setzt man in Gleichung (38) den Ausdruck für  $\Delta S_8$  aus (37) ein, in diese wieder den Ausdruck für  $\Delta S_7$  aus (36) usw., dann folgt

$$\left[ \frac{J_4}{r_4^2} + \frac{q'(l_1' + \Delta l_1)}{2g} \right] (\ddot{x}_2 - 4\ddot{w}) = \Delta S_1 - \frac{J_1}{r_1^2} (\ddot{x}_2 - 3\ddot{w}) - \frac{J_3}{r_3^2} (\ddot{x}_2 - 2\ddot{w}) - B - \\ - \frac{J_1}{r_1^2} (\ddot{x}_2 - \ddot{w}) - \left[ \frac{q'(l_1 - \Delta l_2)}{2g} + \frac{J_4}{r_4^2} \right] \ddot{x}_2 - \Delta S_4.$$

Durch Vereinfachung entsteht daraus

$$\left[ \frac{q'(l_1' + \Delta l_1 + l_1 - \Delta l_2)}{2g} + \frac{2J_4}{r_4^2} + \frac{2J_1}{r_1^2} + \frac{J_3}{r_3^2} \right] \ddot{x}_2 - \\ - \left[ \frac{q'(l_1' + \Delta l_1)}{g} + \frac{2J_4}{r_4^2} + \frac{2J_1}{r_1^2} + \frac{J_3}{r_3^2} \right] 2\ddot{w} = \Delta S_1 - \Delta S_4 - B.$$

Nimmt man an, daß im ersten Glied auf der linken Seite, so wie bei der Bewegungsgleichung für die Umkehrscheibe in der Bergstation,  $\Delta l_1 \sim \Delta l_2$  gesetzt werden darf und schreibt man für  $\Delta S_1$  und  $\Delta S_4$  die bekannten Beziehungen, dann erhalten wir schließlich

$$\left[ \frac{q'(l_1' + l_1)}{2g} + \frac{2J_4}{r_4^2} + \frac{2J_1}{r_1^2} + \frac{J_3}{r_3^2} \right] \ddot{x}_2 - \left( \frac{q'l_1'}{g} + \frac{2J_4}{r_4^2} + \frac{2J_1}{r_1^2} + \frac{J_3}{r_3^2} \right) 2\ddot{w} = \\ = \frac{\Delta H_1}{\cos \gamma_1'} - \frac{\Delta H_4}{\cos \gamma_1} - B, \quad (39)$$

wobei im zweiten Glied auf der linken Seite noch das Produkt  $\Delta l_1 \ddot{w}$  wegen seiner Kleinheit gestrichen wurde.

#### Spanngewicht des Zugseiles

Für dieses ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$\frac{G}{g} \ddot{w} = G - S_4''' - \Delta S_5 - S_4''' - \Delta S_6 - S_1' - \Delta S_7 - S_1' - \Delta S_8.$$

In  $G$  ist auch das Gewicht der Spannscheiben enthalten. Berücksichtigt man, daß vor Beginn des Schwingungsvorganges die Beziehung  $G = 2(S_4''' + S_1')$  gilt, so wird

$$\frac{G}{g} \ddot{w} = -\Delta S_5 - \Delta S_6 - \Delta S_7 - \Delta S_8.$$

Drückt man in dieser Gleichung  $\Delta S_5$  durch (34) aus,  $\Delta S_6$  durch (35),  $\Delta S_7$  durch (37) und  $\Delta S_8$  durch (38), so gelangt man zu

$$\frac{G}{g} \ddot{w} = -2 \left[ \frac{q'(l_1 - \Delta l_2)}{2g} + \frac{J_4}{r_4^2} \right] \ddot{x}_2 - \frac{J_1}{r_1^2} (\ddot{x}_2 - \ddot{w}) + \frac{J_1}{r_1^2} (\ddot{x}_2 - 3\ddot{w}) + \\ + 2 \left[ \frac{J_4}{r_4^2} + \frac{q'(l_1' + \Delta l_1)}{2g} \right] (\ddot{x}_2 - 4\ddot{w}) - 2\Delta S_1 - 2\Delta S_4.$$

Durch Vereinfachung entsteht daraus

$$\frac{G}{g} \ddot{w} = \frac{q'(-l_1 + \Delta l_2 + l_1' + \Delta l_1)}{g} \ddot{x}_2 - 2 \left[ \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{4J_4}{r_4^2} + \frac{2q'(l_1' + \Delta l_1)}{g} \right] \ddot{w} - \\ - 2\Delta S_1 - 2\Delta S_4.$$

Ersetzt man auch hier  $\Delta S_1$  und  $\Delta S_4$  durch die bekannten Beziehungen und streicht wieder die Produkte kleiner Größen, so verbleibt

$$\left( \frac{G}{2g} + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{4J_4}{r_4^2} + \frac{2q'l_1'}{g} \right) \ddot{w} + \frac{q'(l_1 - l_1')}{g} \ddot{x}_2 = -\frac{\Delta H_1}{\cos \gamma_1'} - \frac{\Delta H_4}{\cos \gamma_1}. \quad (40)$$



## Zusammenhangsbedingung

Diese folgt aus dem Umstande, daß die Summe aller Längenänderungen des Zugseiles beim Schwingungsvorgang zufolge der viersträngigen Aufhängung des Spannunggewichtes gleich dessen vierfacher Senkung sein muß. Es gilt daher, wenn wir noch darauf Bedacht nehmen, daß sich gegenüber dem Zustand unmittelbar vor Beginn der Schwingungen der entlang des Seiles gemessene Abstand zwischen dem Wagen  $Q_1$  und der Zwischenstütze um  $\frac{\Delta l_1}{\cos \gamma_1'}$  verkürzt und sich jener zwischen dem Wagen  $Q_2$  und der Zwischenstütze von Null auf  $\frac{\Delta l_2}{\cos \gamma_1}$  vergrößert hat, wobei gemäß der Vorzeichenregel unter III. Verkürzungen positiv zu zählen sind

$$\Delta \lambda_1^0 + \Delta \lambda_1'' + \frac{\Delta l_1}{\cos \gamma_1'} + \sum_2^3 i (\Delta \lambda_i' + \Delta \lambda_i'') + \Delta \lambda_4^0 + \Delta \lambda_4'' - \frac{\Delta l_2}{\cos \gamma_1} = 4w = x_2 - x_1.$$

Setzt man darin für  $\Delta \lambda_1^0$ ,  $\Delta l_1$ ,  $\Delta \lambda_4^0$  und  $\Delta l_2$  die Werte aus den Gleichungen (8a), (10), (28) und (31) ein, dann ergibt sich

$$\frac{x_1 + \Delta \lambda_1' + \Delta \lambda_1''}{1 - \frac{8 f_1^2}{3 l_1'^2} \cos^4 \gamma_1'} + \frac{-x_2 + \Delta \lambda_4' + \Delta \lambda_4''}{1 - \frac{8 f_4^2}{3 l_4^2} \cos^4 \gamma_1} + \sum_2^3 i (\Delta \lambda_i' + \Delta \lambda_i'') = 0. \quad (41)$$

Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man selbstverständlich auch, wenn man in (24) für  $\Delta l_1$  und  $\Delta l_2$  die Werte aus (10) und (31) einführt.

## VII. Zusammenstellung des zu lösenden Gleichungssystems

Das zu lösende Gleichungssystem wird dadurch gewonnen, daß man in den Bewegungsgleichungen (11), (13), (14), (18), (19), (25), (30), (39) und (40) die  $\Delta f_i$  durch die entsprechenden  $\Delta \lambda_i'$  und die  $\Delta H_i$  durch die zugehörigen  $\Delta \lambda_i''$  ersetzt. Außerdem ist in (39) bis (41)  $x_2$  durch  $x_1$  und  $w$  zu ersetzen. Auf diese Weise erhält man der Reihe nach, wenn überdies für  $H_i = \frac{q' l_i^2}{8 f_i}$  geschrieben wird,

$$\begin{aligned} \frac{3 \eta q' l_1'^3}{128 f_1 g \cos^3 \gamma_1'} \Delta \ddot{\lambda}_1' + \frac{3 q' l_1'^3}{128 f_1^2 \cos^3 \gamma_1'} \Delta \lambda_1' - \frac{E_s F_s f_1 \cos^2 \gamma_1'}{l_1'} \Delta \lambda_1'' + \\ + \frac{x_1 + \Delta \lambda_1' + \Delta \lambda_1''}{1 - \frac{8 f_1^2}{3 l_1'^2} \cos^4 \gamma_1'} \frac{2 q}{l_1'} = 0. \end{aligned} \quad (I)$$

$$\left[ \frac{q' (l_1 + l_2)}{2 g} + \frac{Q_1}{g} \right] \frac{\ddot{x}_1 + \Delta \ddot{\lambda}_1' + \Delta \ddot{\lambda}_1''}{1 - \frac{8 f_1^2}{3 l_1'^2} \cos^4 \gamma_1'} + \frac{E_s F_s \cos \gamma_1'}{l_1'} \Delta \lambda_1'' - \frac{E_s F_s \cos \gamma_2}{l_1 - l_1' + l_2} \Delta \lambda_2'' = 0. \quad (II)$$

$$\frac{3 \eta q' l_2^3}{128 f_2 g \cos^3 \gamma_2} \Delta \ddot{\lambda}_2' + \frac{3 q' l_2^3}{128 f_2^2 \cos^3 \gamma_2} \Delta \lambda_2' - \frac{E_s F_s f_2 \cos^2 \gamma_2}{l_1 - l_1' + l_2} \Delta \lambda_2'' = 0. \quad (III)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{q' (l_1 - l_1' + 2 l_2)}{2 g} + \frac{J_2}{r_2^2} \right] \left( \frac{\ddot{x}_1 + \Delta \ddot{\lambda}_1' + \Delta \ddot{\lambda}_1''}{1 - \frac{8 f_1^2}{3 l_1'^2} \cos^4 \gamma_1'} + \Delta \ddot{\lambda}_2' + \Delta \ddot{\lambda}_2'' \right) + \\ + \frac{E_s F_s \cos \gamma_2}{l_1 - l_1' + l_2} \Delta \lambda_2'' - \frac{E_s F_s \cos \gamma_2}{l_2} \Delta \lambda_3'' = 0. \end{aligned} \quad (IV)$$

$$\frac{3 \eta q' l_2^3}{128 f_3 g \cos^3 \gamma_2} \Delta \ddot{\lambda}_3' + \frac{3 q' l_2^3}{128 f_3^2 \cos^3 \gamma_2} \Delta \lambda_3' - \frac{E_s F_s f_3 \cos^2 \gamma_2}{l_2} \Delta \lambda_3'' = 0. \quad (\text{V})$$

$$\left[ \frac{q' (l_1 + l_2)}{2g} + \frac{Q_2}{g} \right] \left[ \frac{\ddot{x}_1 + \Delta \ddot{\lambda}_1 + \Delta \ddot{\lambda}_1''}{1 - \frac{8 f_1^2}{3 l_1'^2} \cos^4 \gamma_1'} + \sum_2^3 i (\Delta \ddot{\lambda}_i' + \Delta \ddot{\lambda}_i'') \right] + \frac{E_s F_s \cos \gamma_2}{l_2} \Delta \lambda_3'' - \frac{E_s F_s \cos \gamma_1}{l_1} \Delta \lambda_4'' = \Delta Z. \quad (\text{VI})$$

$$\frac{3 \eta q' l_1^3}{128 f_4 g \cos^3 \gamma_1} \Delta \ddot{\lambda}_4' + \frac{3 q' l_1^3}{128 f_4^2 \cos^3 \gamma_1} \Delta \lambda_4' - \frac{E_s F_s f_4 \cos^2 \gamma_1}{l_1} \Delta \lambda_4'' - \left[ \frac{x_1 + \Delta \lambda_1' + \Delta \lambda_1''}{1 - \frac{8 f_1^2}{3 l_1'^2} \cos^4 \gamma_1'} + \sum_2^3 i (\Delta \lambda_i' + \Delta \lambda_i'') \right] \frac{2q}{l_1} = 0. \quad (\text{VII})$$

$$\left[ \frac{q' (l_1' + l_1)}{2g} + \frac{2 J_4}{r_4^2} + \frac{2 J_1}{r_1^2} + \frac{J_3}{r_3^2} \right] \ddot{x}_1 + \left[ \frac{q' l_1}{g} + \frac{2 J_4}{r_4^2} + \frac{2 J_1}{r_1^2} + \frac{J_3}{r_3^2} \right] 2 \ddot{w} + \frac{E_s F_s \cos \gamma_1}{l_1} \Delta \lambda_4'' - \frac{E_s F_s \cos \gamma_1' (\gamma_1')}{l_1'} \Delta \lambda_1'' = -B. \quad (\text{VIII})$$

$$q' \frac{(l_1 - l_1')}{g} \ddot{x}_1 + \left( \frac{G}{2g} + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{4 J_4}{r_4^2} + \frac{2 q' l_1}{g} \right) \ddot{w} + \frac{E_s F_s \cos \gamma_1'}{l_1'} \Delta \lambda_1'' + \frac{E_s F_s \cos \gamma_1}{l_1} \Delta \lambda_4'' = 0. \quad (\text{IX})$$

$$\frac{x_1 + \Delta \lambda_1' + \Delta \lambda_1''}{1 - \frac{8 f_1^2}{3 l_1'^2} \cos^4 \gamma_1'} + \frac{-x_1 + 4w + \Delta \lambda_4' + \Delta \lambda_4''}{1 - \frac{8 f_4^2}{3 l_1^2} \cos^4 \gamma_1} + \sum_2^3 i (\Delta \lambda_i' + \Delta \lambda_i'') = 0. \quad (\text{X})$$

### VIII. Auflösung des Gleichungssystems

Das vorliegende Gleichungssystem läßt sich, da die letzte Gleichung keine Ableitungen der Unbekannten enthält, um einen Grad erniedrigen. Man eliminiert dabei am zweckmäßigsten  $w$  und erhält so ein System von neun Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Obgleich die formale Lösung keine Schwierigkeiten bereitet, ergeben sich doch sehr große bei der praktischen Durchführung. Ist doch die aus den Koeffizienten des Gleichungssystems gebildete Frequenzgleichung eine algebraische Gleichung neunten Grades. Es erscheint daher zweckmäßig, die Lösung des Gleichungssystems auf einer modernen Rechenanlage durchzuführen, wofür sich bei dem hier ausreichenden Genauigkeitsgrad eine Analogierechenanlage ganz besonders eignet. Die Anfangsbedingungen, denen die Lösungen zu genügen haben, lauten:

$$t = 0: x_1 = \Delta \lambda_1' = \Delta \lambda_1'' = \dots = \Delta \lambda_4' = \Delta \lambda_4'' = 0, \\ \dot{x}_1 = v_0, \Delta \dot{\lambda}_1' = \Delta \dot{\lambda}_1'' = \dots = \Delta \dot{\lambda}_4' = \Delta \dot{\lambda}_4'' = 0.$$

$v_0$  ist dabei die vor Beginn der Schwingungen vorhandene Zugseilgeschwindigkeit. In dem Augenblick, wo im Zuge des Schwingungsvorganges die Umfangsgeschwindig-

keit an der Antriebscheibe  $\dot{y} = \dot{x}_1 + 2\dot{w} = 0$  wird, verlieren die gefundenen Lösungen ihre Gültigkeit. Um die dann bei stillstehender Bahn noch fortdauernden Zugseilschwingungen verfolgen zu können, muß ein weiteres, dem ersten ähnliches Differentialgleichungssystem aufgestellt werden. In erster Linie interessieren aber doch die Vorgänge bis zum Stillstand der Bahn, weshalb hier die Aufstellung des zweiten Differentialgleichungssystems unterbleibt.

### IX. Vereinfachungen

In der Praxis erweist sich oft die Veränderlichkeit der Spannweiten 1 und 4, die durch die Bewegung der Wagen bis zum Stillstand der Bahn entsteht, von geringem Einfluß auf die Querschwingungen des Zugseiles, weil die Länge der Spannweiten meistens sehr groß gegenüber jener des Bremsweges ist. Wir können dann in den Gl. (11) und (30) der Querschwingungen in den Spannweiten 1 und 4 die zweiten Glieder auf der rechten Seite fortlassen. Außerdem kann man in den Ausdrücken für  $\Delta l_1$  und  $\Delta l_2$  das im Nenner stehende Glied  $\frac{8f_i^2}{3l_i^2} \cos^4 \gamma_i$  als unerheblich streichen. Das Differentialgleichungssystem (I) bis (X) nimmt dann eine etwas einfachere Gestalt an.

### X. Beispiel\*

Dieses bezieht sich auf eine bestehende Bahnanlage.

Über die Längenschnittsverhältnisse gibt die Tabelle 1 Auskunft. Befindet sich der Wagen  $Q_2$  auf der Zwischenstütze, dann beträgt der Abstand des Wagens  $Q_1$  von der Talstation  $l_1' = 1026,00$  m und von der Zwischenstütze  $l_1 - l_1' = 37,00$  m. Für den Sehneneigungswinkel des Feldes  $l_1'$  ergibt sich zufolge der durchgeführten Seilberechnung, der ein Tragseilgewicht von  $p = 10,09$  kp/m und eine Grundspannung des Tragseiles in der Talstation von  $S_0 = 43\,000$  kp zugrundeliegt,  $\cos \gamma_1' = 0,930$ .

Tabelle 1. *Geschriebener Längenschnitt*

Stützpunkt	$l_i$ m	$h_i$ m	$\cos \gamma_i$
Talstation .....	1063,00	428,50	0,9275
Zwischenstütze .....			
Bergstation .....	1014,00	425,50	0,9221

Für das im vorliegenden Fall ober- und unterhalb der Wagen verschiedene Abmessungen besitzende Zugseil gilt:

oberhalb der Wagen: Gewicht  $q = 2,12$  kp/m, metall. Querschnitt  $F_s = 224,8$  mm<sup>2</sup>,

unterhalb der Wagen: Gewicht  $q = 1,46$  kp/m, metall. Querschnitt  $F_s = 154,3$  mm<sup>2</sup>.

Dies läßt sich in den Bewegungsgleichungen leicht berücksichtigen.

Der Elastizitätsmodul dieser Seile wurde mit  $E_s = 10.000$  kp/mm<sup>2</sup> angenommen.

Die Wagengewichte sind:

leerer Wagen  $Q_1 = 1470$  kp,

voller Wagen  $Q_2 = 4200$  kp.

Das Zugseilspanngewicht einschließlich des Gewichtes der Spannscheiben wurde einmal mit  $G = G_0 + G_1 = 15\,000$  kp und einmal mit  $19\,200$  kp angenommen. Damit ergaben sich die in Tabelle 2 ausgewiesenen Horizontalkomponenten der Zugseilspannkkräfte und Zugseil-

\* Die Behandlung desselben besorgte mein Assistent, Herr Dr. E. Engel.



durchhänge in den Feldmitten vor Beginn des Schwingungsvorganges. Die Umfangskraft an der Antriebscheibe beträgt dabei  $U = 320$  kp und ist eine Bremskraft.

Überschreitet der Wagen  $Q_2$  die Zwischenstütze talwärts, so erhöht sich seine Zugwirkung nahezu plötzlich um  $\Delta Z = 1050$  kp. Außer um diesen Betrag soll gleichzeitig die Bremskraft am Antrieb noch um  $B - \Delta Z = 0, 800$  und  $1200$  kp gesteigert werden.

Tabelle 2.

*Horizontalkomponenten der Spannkkräfte und Durchhänge des Zugseiles vor Beginn der Schwingungen*

Feld	$G = 15\,000$ kp		$G = 19\,200$ kp	
	$H_i$ kp	$f_i$ m	$H_i$ kp	$f_i$ m
1 ( $l_1'$ )	3830	54,10	4800	43,10
2 ( $l_2$ )	5920	.	6900	.
3 ( $l_3$ )	5920	.	6900	.
4 ( $l_4$ )	3180	70,00	4150	53,30

Für die bei der Aufstellung des Gleichungssystems benötigten Trägheitsmomente der Seilscheiben wurden die aus Tabelle 3 ersichtlichen Werte angenommen. Der Einfluß der kleinen Zugseiltragrollen blieb dabei wegen ihrer geringen Anzahl außer Betracht.

Tabelle 3.

*Trägheitsmomente der Seilscheiben und des Antriebes*

Bezeichnung	Durchm. mm	Gewicht kp	$J$ kgm <sup>2</sup>	Anmerkung
Umlenkscheibe Bergstation .....	4000	1880	2830	
Ablenkscheibe Talstation .....	2500	510	220	
Antriebscheibe Talstation .....	3000	2460	1980	einschl. Zahn- und Bremskranz
Spannscheibe Talstation .....	4000	1880	2830	
Antriebswindwerk .....	.	.	20300	bezogen auf die Antriebscheibe

Nachdem alle angegebenen Größen in das gemäß IX. vereinfachte Gleichungssystem I bis X unter der Annahme  $\eta \sim 1$  eingesetzt waren, wurde es wie ein System linearer algebraischer Gleichungen nach den zweiten Ableitungen der Unbekannten aufgelöst und dieses so gewonnene umgeformte System von der Analogierechenanlage des Mathematischen Labors der Technischen Hochschule Wien unter Beachtung der Anfangsbedingungen integriert. Als Zugseilgeschwindigkeit vor Beginn des Schwingungsvorganges ist dabei  $v_0 = 8,0$  m/sek gewählt worden.

Die am Bildschirm der Rechenanlage für die einzelnen Unbekannten als Funktion der Zeit sichtbar gewordenen Werte wurden in Lichtbildern festgehalten. Davon sind die für  $G = 19\,200$  kp und  $B - \Delta Z = 800$  kp gefundenen  $\Delta \lambda_i'$ ,  $\Delta \lambda_i''$ ,  $x_1$ ,  $\dot{x}_1$  und  $w$  in den Abb. 7 bis 11 wiedergegeben. Auf Grund der Auswertung aller Lichtbilder war es dann möglich, den Zusammenhang

1. zwischen den Änderungen  $\Delta H_i$  der Horizontalkomponenten der Zugseilspannkkräfte und den zusätzlichen Bremskräften  $B - \Delta Z$  am Antrieb sowie

2. zwischen den Durchhangsänderungen  $\Delta f_i$  des Zugseiles und den zusätzlichen Bremskräften  $B - \Delta Z$  unter Berücksichtigung der verschiedenen Zugseilspanngewichte  $G$  zeichnerisch darzustellen. Die Abb. 12 bis 15 zeigen diese Zusammenhänge für die hauptsächlich interessierenden Seilfelder 1 und 4. In den übrigen Seilfeldern sind die Wirkungen nicht so belangreich.

Abb. 7. Längenänderungen  $\Delta\lambda_i'$  des Seiles in den einzelnen Feldern zufolge der Querschwingungen.

Daraus folgen die Durchgangsänderungen zu

$$\Delta f_i = \frac{3}{16} \frac{l_i}{f_i \cos^3 \gamma_i} \Delta\lambda_i'$$

Längenänderungen, die Durchgangsverminderungen liefern, sind positiv gezählt

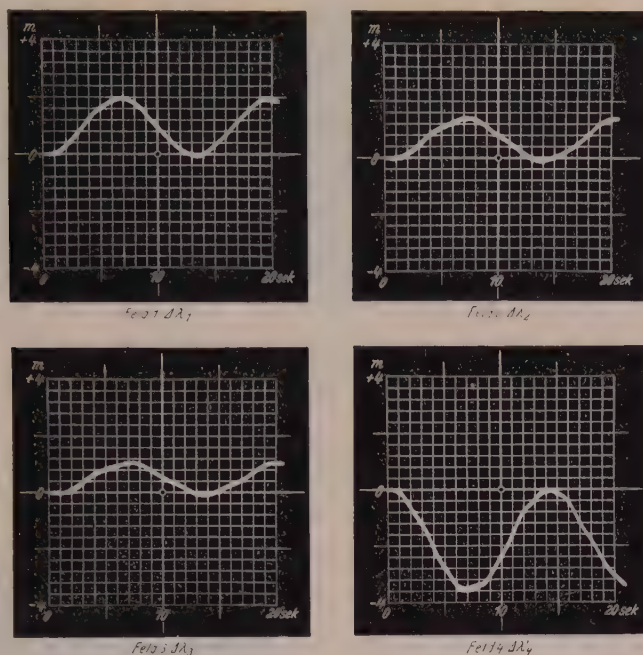
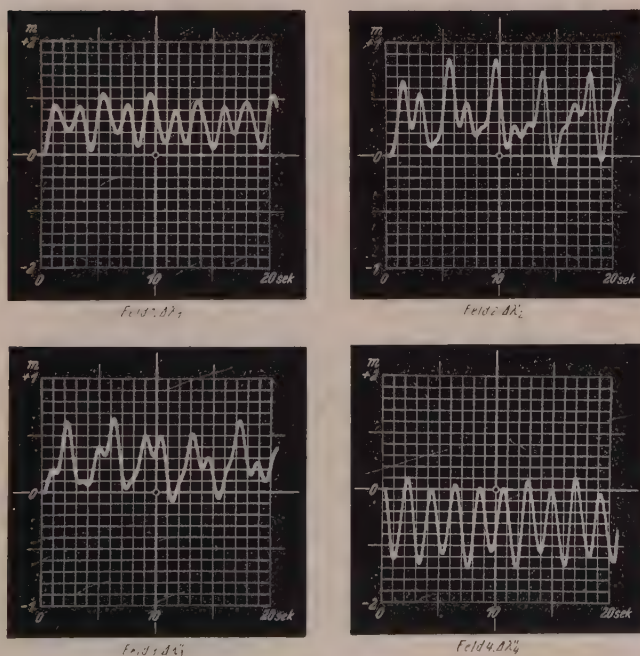


Abb. 8. Elastische Längenänderungen  $\Delta\lambda_i''$  des Seiles in den einzelnen Feldern zufolge der Längsschwingungen.

Daraus folgen die Änderungen der Horizontalkomponenten der Seilspannkräfte zu

$$\Delta H_i = \frac{E_s F_s \cos^2 \gamma_i}{l_i} \Delta\lambda_i''$$

Elastische Längenänderungen, die Spannkrafterhöhungen liefern, sind positiv gezählt



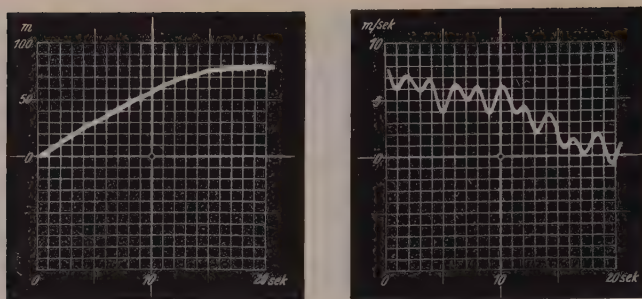


Abb. 9 und 10. Längen  $x_1$  des seit Beginn des Schwingungsvorganges vom Antrieb abgelaufenen Seiles. Ablaufgeschwindigkeit  $\dot{x}_1$  des Seiles vom Antrieb seit Beginn des Schwingungsvorganges

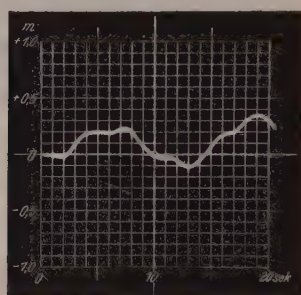


Abb. 11. Wege  $w$  des Zugseilspanngewichtes seit Beginn des Schwingungsvorganges. Senkungen sind positiv gezählt

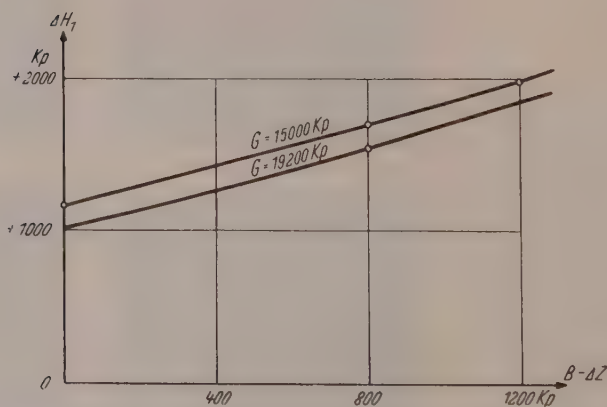


Abb. 12. Zusammenhang zwischen den stärksten positiven Änderungen  $\Delta H_1$  der Horizontal-komponenten der Zugseilspannkraften im Feld 1 und den Bremskräften  $B - \Delta Z$ , bei verschiedenen Zugseilspanngewichten  $G$



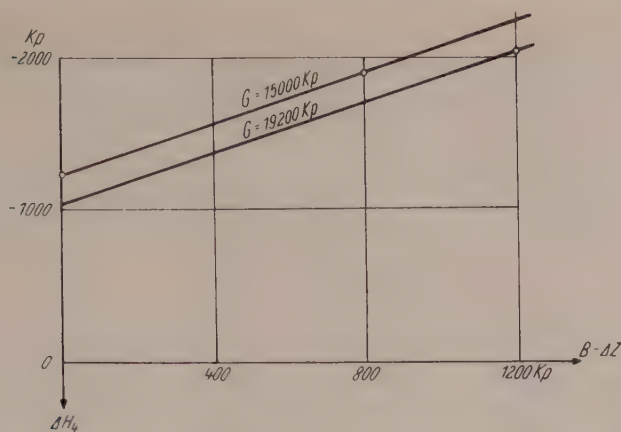


Abb. 13. Zusammenhang zwischen den stärksten negativen Änderungen  $\Delta H_4$  der Horizontal-komponenten der Zugseilspannkraft im Feld 4 und den Bremskräften  $B - \Delta Z$  bei verschiedenen Zugseilspanngewichten  $G$

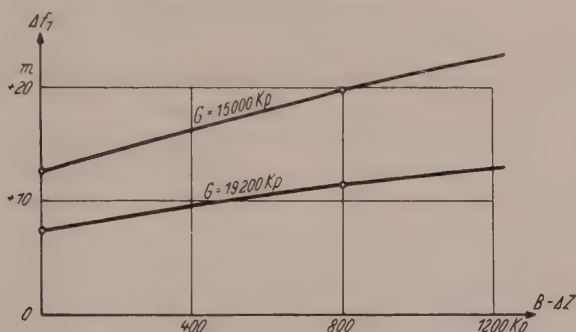


Abb. 14. Zusammenhang zwischen den stärksten Durchhangsverminderungen  $\Delta f_1$  des Zugseiles im Feld 1 und den Bremskräften  $B - \Delta Z$  bei verschiedenen Zugseilspanngewichten  $G$

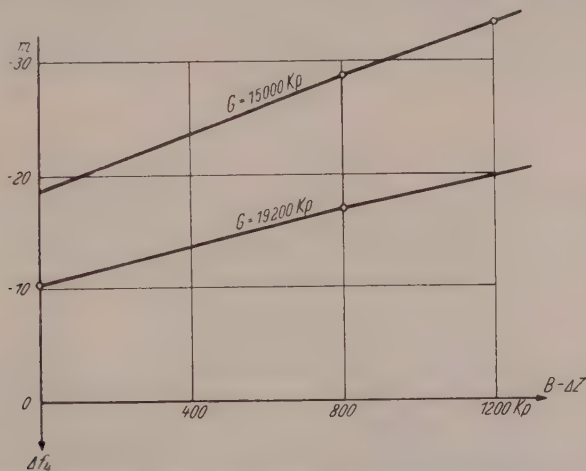


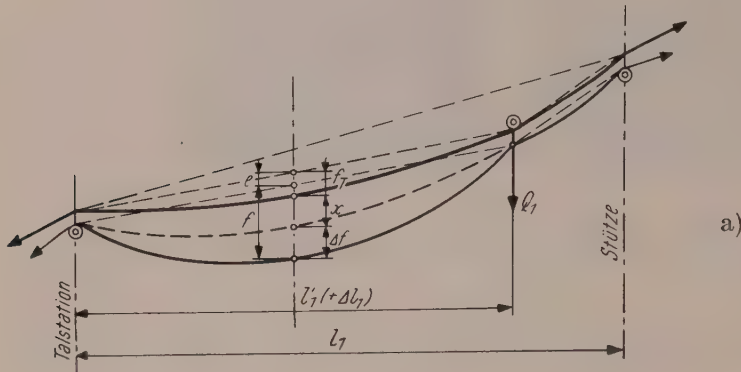
Abb. 15. Zusammenhang zwischen den stärksten Durchhangsvergrößerungen  $\Delta f_4$  des Zugseiles im Feld 4 und den Bremskräften  $B - \Delta Z$  bei verschiedenen Zugseilspanngewichten  $G$

Wie aus der Abb. 16 a zu ersehen ist, gilt in der Mitte eines Feldes des Zugseiles für den Abstand zwischen Trag- und Zugseil die Beziehung

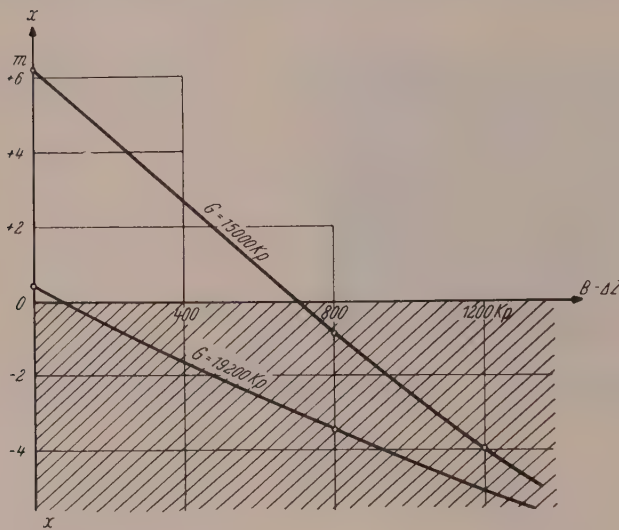
$$x = e + f - \Delta f - f_T, \quad (42)$$

worin  $e$  der lotrechte Abstand zwischen Trag- und Zugseil an den Stützen, bzw. an den Wagen und  $f_T$  der Trageisldurchhang ist. Die Gefahr eines Zugseilüberschlages besteht, wenn

$$x \leq 0$$



a)



b)

Abb. 16. Abhängigkeit des Abstandes  $x$  zwischen Trag- und Zugseil im Feld I von der Bremskraft  $B - \Delta Z$  bei verschiedenen Zugseilspanngewichten  $G$ . Im schraffierten Bereich ist ein Überschlag des Zugseiles über das Tragseil möglich

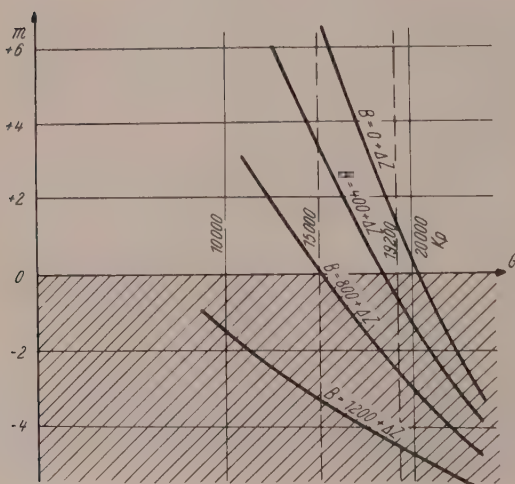


Abb. 17. Abhängigkeit des Abstandes  $x$  zwischen Trag- und Zugseil im Feld I von der Größe  $G$  des Zugseilspanngewichtes bei verschiedenen Bremskräften  $B$ . Im schraffierten Bereich ist ein Überschlag des Zugseiles über das Tragseil möglich

wird. Für das besonders der Gefahr des Seilüberschlages ausgesetzte 1. Seilfeld sind schließlich auf Grund der Auswertungen in den Abb. 16 b und 17 noch die Abstände  $x$  als Funktion der verschiedenen Bremskräfte am Antrieb und als Funktion der verschiedenen Größen des Zugseilspanngewichtes dargestellt. Der Tragseildurchhang wurde dabei gemäß der durchgeführten Seilberechnung mit  $f_T = 34,90$  m eingesetzt und der lotrechte Abstand zwischen Trag- und Zugseil an den Feldenden mit  $e = 0,50$  m angenommen. Die Bereiche, in denen die Gefahr eines Zugseilüberschlages besteht, sind in den Abb. 16 b und 17 durch Schraffierung gekennzeichnet.

Eine später an der Bahnanlage vorgenommene experimentelle Nachprüfung des behandelten Schwingungsvorganges hat eine gute Übereinstimmung mit den errechneten Werten ergeben.

## XI. Folgerungen

Das Beispiel zeigt, daß man auf dem eingeschlagenen Weg unter Benutzung einer Analogierechenanlage wenigstens zu brauchbaren Abschätzungen über die zu erwartenden Zugseil-schwingungen und Spannkraftänderungen im Zugseil gelangen kann. Weiters folgt, daß neben den schon unter I. angeführten für einen Zugseilüberschlag günstigen Umständen auch der Größe des Zugseilspanngewichtes eine erhebliche Bedeutung zukommt. Verringert man die Vorspannung des Zugseiles, so wachsen die dynamischen Durchhangsänderungen  $\Delta f$ . Es wird dabei aber auch der statische Zugseildurchhang  $f$  vergrößert, und zwar in stärkerem Maße als die dynamischen Durchhangsänderungen. Für einen Zugseilüberschlag über das Tragseil ist jedoch gemäß (42) die Differenz  $f - \Delta f$  entscheidend, die sich bei abnehmender Vorspannung des Zugseiles vergrößert. Je größer daher das Zugseilspanngewicht in Vergleich zu den Zugseilabmessungen ist, um so eher besteht die Möglichkeit eines Zugseilüberschlages.

Schließlich sei noch erwähnt, daß sich bei der früher genannten algebraischen Auflösung des gemäß IX. vereinfachten Gleichungssystems (I) bis (X) eine Unabhängigkeit der  $\Delta \lambda_i'$  und  $\Delta \lambda_i''$  von  $x_1$  und natürlich auch von  $w$  zeigt. Dies heißt, daß der Schwingungsvorgang des Zugseiles unabhängig von der ursprünglichen Fahr-geschwindigkeit ist. Dies trifft aber nur so lange zu, als der Stützenübergang des talwärts fahrenden vollbesetzten Wagens in so kurzer Zeit stattfindet, daß diese, wie hier geschehen, wegen der angenommenen großen Fahrgeschwindigkeit außer Betracht bleiben kann.

(Eingegangen am 4. Oktober 1960)

## Die gleichmäßig belastete dünne Kreisringplatte mit großer Ausbiegung

Von K. Federhofer, Graz

Mit 5 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Das Problem wird auf zwei gekoppelte nichtlineare Differentialgleichungen für eine Verzerrungs- und Spannungsfunktion zurückgeführt. Zunächst wird die linearisierte Plattengleichung behandelt und dann eine auf einem dreigliedrigen Ansatz aufgebaute Näherungslösung der strengen Gleichung hergeleitet. Ein Vergleich mit der linearen Lösung zeigt beträchtliche Abweichungen.

## Einleitung

Die Berechnung der Spannungen in einer dünnen Kreisringplatte, deren Durchbiegungen vergleichbar mit der Plattendicke oder noch größer als diese werden, so daß die Voraussetzungen der linearen Kirchhoffschen Plattentheorie nicht mehr zutreffen,



wurde bisher nur in einem einzigen Falle, nämlich für die an ihrem frei verschieblichen Innenrande durch gleichmäßig verteilte Randkräfte belastete Ringplatte streng durchgeführt<sup>1</sup>. Hierbei wurden die erheblichen Abweichungen festgestellt, die sich sowohl bezüglich der Formänderung als auch der Beanspruchungen ergeben, wenn die Berechnung der dünnen Kreisringplatte in üblicher Weise entweder nach der linearen Biegungstheorie oder als Ringmembrane erfolgt. Für letztere wurde die strenge Lösung von E. Schwerin<sup>2</sup> angegeben. Der praktisch besonders wichtige Fall der dünnen Ringplatte mit gleichmäßiger Oberflächenbelastung, der in seiner numerischen Behandlung einen sehr beträchtlichen Rechenaufwand erfordert, blieb bisher unerledigt; er wird im Nachstehenden — auch numerisch — eingehend untersucht. Die gewonnenen Ergebnisse zeigen, daß auch hier die gebräuchliche Verwendung der linearen Biegungstheorie oder der Ringmembrantheorie zu recht beträchtlichen Abweichungen von den strengen Ergebnissen führt.

## I. Grundgleichungen

Es bezeichnen	$r_i, r_a$	den Innen- und Außendurchmesser der Ringplatte,
	$h$	deren Dicke,
	$\varphi(r)$	den Biegewinkel am Orte $r$ ,
	$p$	die konstante Belastung je Flächeneinheit,
	$w$	die Einsenkung an der Stelle $r$ ,
	$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$	die Biegesteifigkeit,
	$E$	Elastizitätszahl des Plattenstoffes,
	$\mu$	Poissonsche Zahl.

Mit

$$u = \sin \varphi$$

gilt für die Biegemomente  $G_1, G_2$  im Meridianschnitte und im dazu senkrechten zweiten Hauptschnitte

$$G_1 = -D \left( \frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right), \quad (1)$$

$$G_2 = -D \left( \frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right). \quad (2)$$

Mit  $\varrho = \frac{r}{r_a}$  und Einführung einer dimensionslosen Spannungsfunktion  $\psi(\varrho)$  lassen sich die Membrankräfte  $T_1, T_2$  in den genannten Schnitten darstellen durch

$$T_1 = \frac{D}{r_a^2} \frac{\psi}{\varrho}, \quad (3)$$

$$T_2 = \frac{D}{r_a^2} \frac{d\psi}{d\varrho}. \quad (4)$$

Mit der Festsetzung

$$\Phi(\varrho) = 2 \sqrt{3} \frac{r_a}{h} u(\varrho) \quad (5)$$

<sup>1</sup> K. Federhofer: Österr. Ing. Arch. Bd. 1 (1946), S. 21–35; u. Bd. 11 (1957) S. 252–256; im Auszuge auch Z. ang. Math. Mech. 25 (1945), S. 5–10 mit weiteren Schrifttumsangaben.

<sup>2</sup> E. Schwerin: Z. techn. Physik, 10 (1929) S. 651–659.

und mit dem homogenen Differentialoperator

$$L(\cdot) \equiv \frac{d^2}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} - \frac{1}{\varrho^2}$$

lauten die Grundgleichungen für die Berechnung der gleichmäßig belasteten Kreisringplatte mit großer Ausbiegung<sup>3)</sup>

$$L(\psi) + m \frac{\Phi^2}{\varrho} = 0, \quad (6)$$

$$L(\Phi) - \frac{\Phi \psi}{\varrho} + \frac{\theta}{2} \left( \varrho - \frac{\varrho_i^2}{\varrho} \right) = 0, \quad (7)$$

worin die reinen Zahlenwerte  $m$  und  $\theta$  bestimmt sind durch

$$m = \frac{1 - \mu^2}{2}, \quad (8)$$

$$\theta = 24 \sqrt{3} (1 - \mu^2) \frac{p r_a^4}{E h^4}. \quad (9)$$

Die Dimensionslose

$$\frac{p r_a^4}{E h^4} = \nu \quad (10)$$

stellt den Plattenparameter dar.

Diese beiden nichtlinearen Differentialgleichungen II. Ordnung sind mit den vier Randbedingungen

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{d\varrho} + \mu \frac{\Phi}{\varrho} &= 0 \text{ für } \varrho = 1 \text{ und } \varrho = \varrho_i = \frac{r_i}{r_a}, \\ \psi &= 0 \text{ für } \varrho = \varrho_i, \quad \frac{d\psi}{d\varrho} - \mu \frac{\psi}{\varrho} = 0 \text{ für } \varrho = 1 \end{aligned}$$

zu integrieren. Die beiden ersten Bedingungen bringen das Verschwinden des Spannungsmomentes  $G_1$  am Außen- und Innenrand der Ringplatte zum Ausdruck, die dritte das Verschwinden der Membrankraft  $T_1$  am freien Innenrande, die vierte die Festhaltung des gelenkig gehaltenen Außenrandes (ausgedrückt durch Nullsetzen der tangentialen Dehnung  $\varepsilon_2 = \frac{h^2}{12 D} (T_2 - \mu T_1)$ ).

## II. Lösung der Grundgleichungen (6) und (7)

Der naheliegende Weg zur Lösung der beiden nichtlinearen Grundgleichungen besteht darin, die Funktionen  $\Phi$  und  $\psi$  als unendliche Reihen mit positiven Potenzen von  $\varrho$  anzusetzen und deren Koeffizienten durch Eintragung der Reihen in die Grundgleichungen und Erfüllung der angegebenen Randbedingungen zu bestimmen. Wie eine nach diesem Verfahren durchgeführte eingehende Untersuchung<sup>4)</sup> in dem wesentlich einfacheren Falle der vollen Kreisplatte gezeigt hat, erfordert die numerische Durchführung solcher Rechnungen einen sehr großen Rechenaufwand, da infolge der schlechten Konvergenz der beiden Potenzreihen eine sehr große Zahl von Gliedern

<sup>3)</sup> Ihre Herleitung findet man in der Arbeit des Verfassers in: Luftfahrtforschung Bd. 21 (1944) S. 1–10.

<sup>4)</sup> K. Federhofer: Sitz. Ber. Österr. Akad. d. Wiss. (math. naturw. Kl.) Abt. IIa, Bd. 155 (1946) S. 15–43; vgl. auch Fußnote 2.

berücksichtigt werden muß. Zur Gewinnung von passenden Werten der Anfangskoeffizienten in beiden Reihen ist aber jedenfalls zunächst die Kenntnis einer Näherungslösung der Grundgleichungen notwendig, die dadurch gewonnen wird, daß die nichtlinearen Glieder der Grundgleichungen durch jene Werte ausgedrückt werden, die sich aus dem Grenzfalle der biegungsfesten Ringplatte ohne Membranwirkung berechnen lassen; mit der Integration der nun linearen Differentialgleichungen ergibt sich eine Näherungslösung der Grundgleichungen.

#### A. Ringplatte ohne Membranwirkung

Für diesen Grenzfall (lineare Plattentheorie) ist  $\psi = 0$ , womit sich Gl. (7) vereinfacht in

$$L(\Phi) + \frac{\Theta}{2} \left( \varrho - \frac{\varrho_i^2}{\varrho} \right) = 0$$

mit der Lösung

$$\Phi(\varrho) = c_1 \varrho + \frac{c_2}{\varrho} - \frac{\Theta \varrho^3}{16} - \frac{\Theta \varrho_i^2 \varrho}{8} + \frac{\Theta}{4} \varrho_i^2 \varrho \ln \varrho. \quad (11)$$

Durch Erfüllung der für  $\Phi(\varrho)$  vorgeschriebenen Randbedingungen ergeben sich die beiden Integrationskonstanten  $c_1, c_2$  mit

$$c_1 = \frac{\Theta}{16(1+\mu)} \left[ (3+\mu) + (1+3\mu) \varrho_i^2 + 4(1+\mu) \frac{\varrho_i^4}{1-\varrho_i^2} \ln \varrho_i \right] = \frac{\Theta}{16} c_1^*, \quad (12)$$

$$c_2 = \frac{\Theta}{16(1-\mu)} \varrho_i^2 \left[ (3+\mu) + 4(1+\mu) \frac{\varrho_i^2}{1-\varrho_i^2} \ln \varrho_i \right] = \frac{\Theta}{16} c_2^*, \quad (13)$$

womit Gl. (11) übergeht in

$$\Phi(\varrho) = \frac{\Theta}{16} \left[ (c_1^* - 2 \varrho_i^2) \varrho - \varrho^3 + \frac{c_2^*}{\varrho} + 4 \varrho_i^2 \varrho \ln \varrho \right]. \quad (14)$$

Mit  $\mu = 0,3$  liefern die Gln. (12, 13) die Werte

$$c_1^* = 2,53846 + 1,46154 \varrho_i^2 + \frac{4 \varrho_i^4}{1-\varrho_i^2} \ln \varrho_i, \quad (15)$$

$$c_2^* = 4,71429 \varrho_i^2 + 1,85714 \frac{4 \varrho_i^4}{1-\varrho_i^2} \ln \varrho_i. \quad (16)$$

Diese nur von der Lochverhältniszahl  $\varrho_i$  abhängigen Konstanten  $C_1^*, C_2^*$  können daher für verschiedene  $\varrho_i$  ein für allemal tabuliert werden.

Tabelle 1

$\varrho_i$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$c_1^*$	2,55214	2,62713	2,67280	2,58295	2,26661	2,0
$c_2^*$	0,04542	0,32468	0,74948	1,0626	1,1156	1,0

Für die Durchbiegung  $w(r)$  der Ringplatte an der Stelle  $r = r_a \varrho$  gilt

$$-\frac{dw}{dr} = \sin \varrho = u$$

oder wegen Gl. (5):  $-dw = \frac{h}{2\sqrt{3}} \Phi(\varrho) d\varrho;$



hieraus folgt mit dem Ansatz (14) und mit der Randbedingung

$$w(\varrho)_{\varrho=1} = 0$$

$$w(\varrho) = \frac{h}{32\sqrt{3}} \Theta \left[ \left( \frac{c_1^*}{2} - 2\varrho_i^2 \right) (1 - \varrho^2) - \frac{1 - \varrho^4}{4} - (c_2^* + 2\varrho_i^2 \varrho^2) \ln \varrho \right]$$

oder mit Beachtung der Gln. (9 und 10):

$$\frac{w(\varrho)}{h} = \frac{3}{4} (1 - \mu^2) \nu \left[ \left( \frac{c_1^*}{2} - 2\varrho_i^2 \right) (1 - \varrho^2) - \frac{1 - \varrho^4}{4} - (c_2^* + 2\varrho_i^2 \varrho^2 \ln \varrho) \right]. \quad (17)$$

Mit  $\varrho = \varrho_i$  ergibt sich hieraus für die Einsenkung  $w_i$  des Innenrandes

$$\frac{w_i}{h} = \frac{3}{4} (1 - \mu^2) \nu \left[ \left( \frac{c_1^*}{2} - 2\varrho_i^2 \right) (1 - \varrho_i^2) - \frac{1 - \varrho_i^4}{4} - (c_2^* + 2\varrho_i^4) \ln \varrho_i \right] \quad (18)$$

oder nach Eintragung der gemäß den Gln. (12 und 13) für  $c_1^*$  und  $c_2^*$  geltenden Werte und nach einigen Umformungen<sup>5</sup>

$$\frac{w_i}{h} = \frac{3}{4} (1 - \mu^2) \nu \left[ \frac{5 + \mu}{4(1 + \mu)} (1 - \varrho_i^2)^2 - \frac{4(1 + \mu)}{1 - \mu} \frac{\varrho_i^4}{1 - \varrho_i^2} \left( (\ln \varrho_i)^2 - \frac{3}{1 - \mu} \varrho_i^2 \ln \varrho_i \right) \right] \quad (19)$$

Für die volle Kreisplatte folgt hieraus mit  $\varrho_i = 0$  das bekannte Ergebnis

$$\left( \frac{w_i}{h} \right)_{\varrho_i=0} = \frac{3}{16} (1 - \mu) (5 + \mu) \nu.$$

Nachstehend sind die aus Gl. (18) gerechneten Werte  $w_i/\nu h$  für fünf Lochverhältniszahlen  $\varrho_i$  im Bereiche von 0,1 bis 1 mit  $\mu = 0,3$  angegeben.

$\nu$  bedeutet hierin den Plattenparameter gemäß Gl. (10).

Tabelle 2

$\varrho_i$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$\frac{w_i}{\nu h}$	0,750	0,815	0,682	0,354	0,053	0

Die strichlierte Kurve in Abb. 1 zeigt die Abhängigkeit der Werte  $\frac{w_i}{\nu \cdot h}$  von  $\varrho_i$  und dient für Interpolationszwecke. Für die volle Kreisplatte ergibt sich aus Gl. (20)

$$\left( \frac{w_i}{\nu h} \right)_{\varrho_i=0} = 0,6956.$$

Über die Form der Meridianlinie der durchgebogenen Ringplatte in ihrer Abhängigkeit vom Lochverhältnisse  $\varrho_i$  geben die in Abb. 1 dargestellten Kurven Aufschluß. Es sind dort zu den Abzissen  $\varrho$  die homogenen Durchbiegungswerte  $\frac{w(\varrho)}{\nu \cdot h}$  nach Gl. (17) für Ringplatten mit  $\varrho_i = 0,1, 0,3, 0,5, 0,7$  gemäß den Zahlenangaben der folgenden Tabelle aufgetragen.

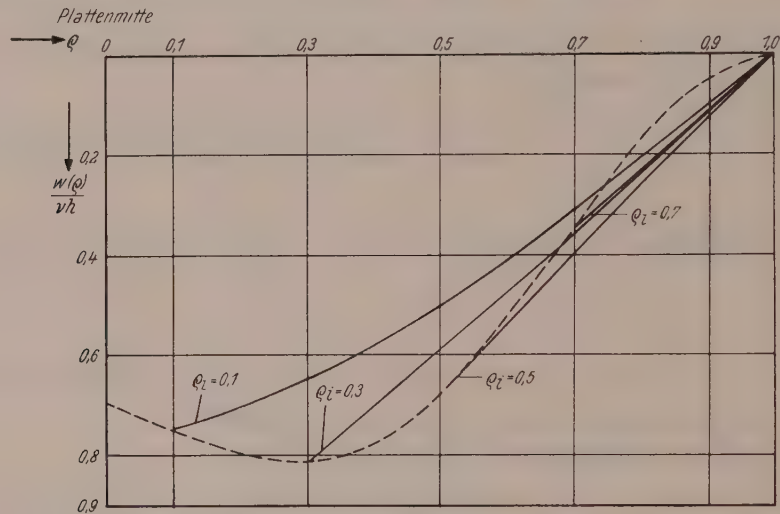
<sup>5</sup> Vgl. hierzu A. u. L. Föppl, Drang und Zwang, München und Berlin 1920, 1. Bd. Die dortige Gl. (97) (S. 177) stimmt überein mit Gl. (19).

Durchbiegungswerte  $\frac{w(\varrho)}{\nu h}$ .

Tabelle 3

$\varrho$	0,1	0,3	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\varrho_i = 0,1$	0,7501	0,6497	0,5068	0,4185	0,3210	0,2098	0,1087	0
$\varrho_i = 0,3$	—	0,8148	0,5951	0,4825	0,3654	0,2447	0,1222	0
$\varrho_i = 0,5$	—	—	0,6819	0,5409	0,4035	0,2677	0,1328	0
$\varrho_i = 0,7$	—	—	—	—	0,3543	0,2331	0,1152	0

Im Bereiche  $\varrho_i \leq 0,3$  verlaufen nach Abb. 1 die Meridianlinien nahezu geradlinig; die Mantelfläche der deformierten Ringplatte geht daher fast in einen Konus über.

Abb. 1. Meridianlinien der durchgebogenen Ringplatte für  $\varrho_i = 0,1, 0,3, 0,5, 0,7$ 

### B. Berücksichtigung der Membranwirkung der Ringplatte

Die Ermittlung des Einflusses der Membrankräfte auf die Formänderung und Spannungen einer dünnen Ringplatte erfordert die Beibehaltung des nichtlinearen Gliedes  $\frac{\Phi \psi}{\varrho}$  in der Grundgleichung (7), das bei der im Abschnitt (A) durchgeführten Berechnung der Biegungsfunktion  $\Phi$  nach der linearen Theorie unberücksichtigt geblieben ist.

Eine Lösung der vollständigen Grundgleichung (7) in geschlossener Form ist nur möglich mit der Annahme  $\frac{\psi}{\varrho} = R^2$  ( $R = \text{Konstante}$ ); dann lautet Gl. (7)

$$\Phi^{II} + \frac{1}{\varrho} \Phi^I - \left( \frac{1}{\varrho^2} + R^2 \right) \Phi + \frac{\Theta}{2} \left( \varrho - \frac{\varrho_i^2}{\varrho} \right) = 0.$$

Mit den Substitutionen

$$\Gamma = R^2 \Phi, \quad R \varrho = \eta$$

geht sie über in

$$\frac{d^2 \Gamma}{d \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{d \Gamma}{d \eta} - \left( 1 + \frac{1}{\eta^2} \right) \Gamma = - \frac{\Theta}{2} \left( \frac{\eta}{R} - \frac{\varrho_i^2 R}{\eta} \right) \quad (20)$$

mit der Lösung

$$\Gamma(\eta) = c_1 J_1(i\eta) + c_2 N_1(i\eta) - \frac{\Theta}{2} \left( \frac{\eta}{R} - \frac{\varrho_i^2 R}{\eta} \right), \quad (21)$$

worin  $J_1$  und  $N_1$  die Besselsche Funktion erster und zweiter Art von der Ordnung Eins und dem Argumente  $(i\eta)$  darstellt. ( $i$  = imaginäre Einheit). Die Annahme  $\frac{\psi}{\varrho} = R^2$  ist gemäß Gl. (3) gleichbedeutend mit der Voraussetzung einer entlang der Meridianlinie konstanten Membrankraft  $T_1$ . Da aber  $T_1$  am freien Innenrande der Platte auf den Wert Null absinken muß, so kann diese Annahme nicht zugelassen werden<sup>6</sup>.

Ein die beiden Randbedingungen für die Funktion  $\psi(\varrho)$  erfüllender Ansatz für  $\psi/\varrho$  ergibt sich aus der nichtlinearen Grundgleichung (6), indem dort für die Biegungsfunktion  $\Phi(\varrho)$  der Ausdruck (14) eingesetzt wird, der der linearen Biegungstheorie entspricht.

Mit

$$-\frac{m\Phi^2}{\varrho} = Q(\varrho) \quad (22)$$

lautet die Gleichung (6)

$$L(\psi) = Q(\varrho).$$

Sie besitzt die Lösung

$$\psi(\varrho) = c_3 \varrho + \frac{c_4}{\varrho} + \frac{\varrho}{2} \int Q d\varrho - \frac{1}{2\varrho} \int Q \varrho^2 d\varrho; \quad (23)$$

die Integrationskonstanten  $c_3, c_4$  sind bestimmt durch die Randbedingungen:

$$\psi = 0 \text{ für } \varrho = \varrho_i; \quad \frac{d\psi}{d\varrho} - \mu \frac{\psi}{\varrho} = 0 \text{ für } \varrho = 1.$$

Mit dem viergliedrigen Ausdruck (Gl. 14) für  $\Phi(\varrho)$  wird die Funktion  $Q(\varrho)$  in (22) zehngliedrig, womit die Anzahl der Glieder von  $\psi(\varrho)$  in (23) bereits auf 22 ansteigt, so daß sich für das in Gl. (7) zu berücksichtigende Glied  $\frac{\Phi\psi}{\varrho}$  ein Ausdruck mit nicht weniger als 88 Gliedern von komplizierter Form ergeben würde.

Die folgende Näherungslösung, die einen noch erträglichen Rechenaufwand erfordert, wird dadurch gewonnen, daß für die Biegungsfunktion  $\Phi(\varrho)$  der dreigliedrige Ansatz<sup>7</sup>

<sup>6</sup> Bei der vollen Kreisplatte hat hingegen die Annahme  $T_1 = \text{konst.}$  zu Ergebnissen geführt, welche die von St. Way 16 Jahre später im Wege eines graphischen Interpolationsverfahrens gewonnenen genauen Ergebnisse überraschend gut durch verhältnismäßig einfache geschlossene Formeln annähern.

Vgl. meine Aufsätze Eisenbau, 9 (1918) S. 152 und Forschung auf dem Gebiete des Ing.-Wesens 7. Jg. (1936) S. 148.

Ohne Bezugnahme auf diese Arbeiten hat H. D. Conway in einer im Vorjahre erschienenen Notiz „Zur Lösung von St. Way für die eingespannte Kreisplatte“ die Annahme  $T_1 = \text{konst.}$  neuerdings benutzt. (Journ. Appl. Mech. 24, (1957) S. 151.)

<sup>7</sup> Der Ersatz des viergliedrigen Ausdruckes (14) durch den dreigliedrigen Ausdruck (24) ist im Bereiche  $\varrho_i \leq 0,5$  dadurch begründet, daß das letzte Glied in (14) nur wenige Prozente des Gesamtwertes ausmacht. In dem praktisch weniger wichtigen Bereiche  $\varrho_i > 0,5$  wird die geeignete Bestimmung von  $C$  den Ausfall des vierten Gliedes kompensieren. Mit dem Ansatz (24) wird die größte Durchbiegung der Ringplatte bei Vernachlässigung der Membrankräfte bereits bis auf wenige Promille genau angenähert.



$$\Phi(\varrho) = C \left( \varrho + \alpha_1 \varrho^3 + \frac{\alpha_2}{\varrho} \right) \quad (24)$$

gewählt und der Freiwert  $C$  so bestimmt wird, daß die Grundgleichung (7) möglichst gut erfüllt wird.

Mit den Werten

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{1+\mu}{3+\mu} \frac{1}{\varrho_i^2+1}, \\ \alpha_2 &= \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\varrho_i^2}{\varrho_i^2+1} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

sind die für  $\Phi(\varrho)$  vorgeschriebenen Randbedingungen befriedigt.

$$\text{Mit dem Ansatz (24) wird gemäß (22) } Q(\varrho) = -m C^2 \frac{(\varrho + \alpha_1 \varrho^3 + \alpha^2/\varrho)^2}{\varrho}.$$

$$\text{Mit} \quad m C^2 = \Omega \quad (26)$$

$$\text{und} \quad \beta_1 = 1 + 2 \alpha_1 \alpha_2 \quad (27)$$

lautet Gleichung (6)

$$L(\psi) = -\Omega \left( \beta_1 \varrho + 2 \alpha_1 \varrho^3 + \alpha_1^2 \varrho^5 + \frac{2 \alpha_2}{\varrho} + \frac{\alpha_2^2}{\varrho^3} \right). \quad (28)$$

Aus (23) ergibt sich mit  $c_3 = \frac{\Omega}{2} \bar{c}_3$ ,  $c_4 = \frac{\Omega}{2} \bar{c}_4$  die Lösung

$$\psi(\varrho) = \frac{\Omega}{2} \left[ \bar{c}_3 \varrho + \frac{\bar{c}_4}{\varrho} + F(\varrho) \right],$$

worin

$$F(\varrho) = \alpha_2 \varrho - \frac{\beta_1 \varrho^3}{4} - \frac{\alpha_1 \varrho^5}{6} - \frac{\alpha_1^2 \varrho^7}{24} + \frac{\alpha_2^2}{2 \varrho} - 2 \alpha_2 \varrho \ln \varrho + \frac{\alpha_2^2 \ln \varrho}{\varrho}. \quad (29)$$

Hiemit wird

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\varrho} - \mu \frac{\psi}{\varrho} &= \frac{\Omega}{2} \left[ \bar{c}_3 (1-\mu) - \frac{\bar{c}_4}{\varrho^2} (1+\mu) - \left\{ \alpha_2 (1+\mu) + \frac{\beta_1 \varrho^2}{4} (3-\mu) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\alpha_1 \varrho^4}{6} (5-\mu) + \frac{\alpha_1^2 \varrho^6}{24} (7-\mu) - \frac{\alpha_2^2}{2 \varrho^2} (1-\mu) + 2 \alpha_2 (1-\mu) \ln \varrho + \alpha_2^2 \frac{(1+\mu)}{\varrho^2} \ln \varrho \right\} \right] \end{aligned}$$

oder mit  $\{\dots\} = P(\varrho)$

$$\frac{d\psi}{d\varrho} - \mu \frac{\psi}{\varrho} = \frac{\Omega}{2} \left[ \bar{c}_3 (1-\mu) - \frac{\bar{c}_4}{\varrho^2} (1+\mu) - P(\varrho) \right]. \quad (30)$$

Entsprechend den für die Funktion  $\psi(\varrho)$  vorgeschriebenen Randbedingungen gelten die nachstehenden zwei Gleichungen

$$\bar{c}_3 \varrho_i + \frac{\bar{c}_4}{\varrho_i} + F(\varrho_i) = 0,$$

$$\bar{c}_3 (1-\mu) - \bar{c}_4 (1+\mu) - P(1) = 0,$$

worin

$$P(1) = \alpha_2 (1+\mu) + \frac{\beta_1}{4} (3-\mu) + \frac{\alpha_1}{6} (5-\mu) + \frac{\alpha_1^2}{24} (7-\mu) - \frac{\alpha_2^2}{2} (1-\mu). \quad (31)$$

Für die Integrationskonstanten ergibt sich somit

$$c_3 = \frac{1}{N} \left[ \frac{P(1)}{\varrho_i} - (1 + \mu) F(\varrho_i) \right], \quad (32)$$

$$\bar{c}_4 = -\frac{1}{N} [P(1) \varrho_i + (1 - \mu) F(\varrho_i)], \quad (33)$$

wobei

$$N = (1 + \mu) \varrho_i + \frac{1 - \mu}{\varrho_i}.$$

Mit den Abkürzungen

$$K_1 = c_3 + \alpha_2 \quad (34)$$

$$K_2 = c_4 + \frac{\alpha_2^2}{2} \quad (35)$$

folgt schließlich aus (29) die Funktion  $\psi(\varrho)$  mit

$$\psi(\varrho) = \frac{\Omega}{2} \left[ K_1 \varrho + \frac{K_2}{\varrho} - \frac{\beta_1}{4} \varrho^3 - \frac{\alpha_1}{6} \varrho^5 - \frac{\alpha_1^2}{24} \varrho^7 - 2 \alpha_2 \varrho \ln \varrho + \frac{\alpha_2^2}{\varrho} \ln \varrho \right]. \quad (36)$$

In der folgenden Tabelle 4 sind die für vier Lochverhältniszahlen  $\varrho_i$  gerechneten Hilfswerte  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, F(\varrho_i), P(1), c_3, \bar{c}_4, K_1$  und  $K_2$  zusammengestellt. Hierbei wurde  $\mu = 0,3$  gesetzt.

Tabelle 4

$\varrho_i$	0,1	0,3	0,5	0,7	Gleichung
$\alpha_1$	- 0,39	- 0,3614	- 0,31515	- 0,26439	} (25)
$\alpha_2$	+ 0,01839	+ 0,15334	+ 0,37143	+ 0,61073	
$\beta_1$	+ 0,98566	+ 0,88916	+ 0,76588	+ 0,67706	(27)
$F(\varrho_i)$	+ 0,00396	+ 0,09574	+ 0,36755	+ 0,75796	(29)
$P(1)$	+ 0,42605	+ 0,54465	+ 0,73239	+ 0,93282	(31)
$\bar{c}_3$	+ 0,59682	+ 0,62093	+ 0,48143	+ 0,18181	(32)
$\bar{c}_4$	- 0,00636	- 0,08461	- 0,30414	- 0,61966	(33)
$K_1$	+ 0,61521	+ 0,77427	+ 0,85286	+ 0,79254	(34)
$K_2$	- 0,006195	- 0,07285	- 0,23516	- 0,43317	(35)

Geht man nun mit den durch die Gleichung (24) und (36) bestimmten Funktionen  $\Phi(\varrho)$  und  $\psi(\varrho)$  in die Grundgleichung (7) und bezeichnet den sich dabei ergebenden Ausdruck mit  $E(\varrho)$ , so soll dieser für die strenge Lösung bei jedem  $\varrho \geq \varrho_i$  gleich Null sein. Diese Gleichung wird nun für jenen noch offenen Wert  $C$  am besten erfüllt, welcher der Galerkinschen Vorschrift

$$\int_{\varrho_i}^1 E(\varrho) \Phi(\varrho) \varrho d\varrho = 0$$

genügt. Setzen wir

$$\Phi(\varrho) = C \bar{\Phi}(\varrho),$$

$$\psi(\varrho) = \frac{\Omega}{2} \bar{\psi}(\varrho), \quad (36a)$$

oder wegen (26):

$$\psi(\varrho) = \frac{m C^2}{2} \bar{\psi}(\varrho), \quad (36b)$$

so ergibt sich für die linke Gleichungsseite von (7)

$$E(\varrho) = 8 \alpha_1 \varrho C - \frac{m}{2} C^3 \frac{\bar{\Phi} \bar{\psi}}{\varrho} + \frac{\Theta}{2} \left( \varrho - \frac{\varrho_i^2}{\varrho} \right).$$

Demnach lautet obige Bedingungsgleichung für den Freiwert  $C$

$$8 \alpha_1 C \int_{\varrho_i}^1 \bar{\Phi}(\varrho) \varrho^2 d\varrho - \frac{m C^3}{2} \int_{\varrho_i}^1 \bar{\Phi}^2 \bar{\psi} d\varrho + \frac{\Theta}{2} \int_{\varrho_i}^1 \varrho \left( \varrho - \frac{\varrho_i^2}{\varrho} \right) \bar{\Phi} d\varrho = 0.$$

Da 
$$\int_{\varrho_i}^1 \bar{\Phi} \varrho^2 d\varrho = \frac{1 - \varrho_i^4}{4} + \alpha_1 \frac{1 - \varrho_i^6}{6} + \frac{\alpha_2}{2} (1 - \varrho_i^2) = b_1, \quad (37)$$

$$\int_{\varrho_i}^1 \varrho \left( \varrho - \frac{\varrho_i^2}{\varrho} \right) \bar{\Phi} d\varrho = b_1 - \varrho_i^2 \left[ \frac{1 - \varrho_i^2}{2} + \alpha_1 \frac{1 - \varrho_i^4}{4} - \alpha_2 \ln \varrho_i \right] = b_1 - \varrho_i^2 b_3, \quad (38)$$

so ergibt sich für  $C$  die kubische Gleichung

$$8 \alpha_1 b_1 C - \frac{m C^3}{2} \int_{\varrho_i}^1 \bar{\Phi}^2 \bar{\psi} d\varrho + \frac{\Theta}{2} (b_1 - \varrho_i^2 b_3) = 0. \quad (39)$$

Die Auswertung des mittleren Integrals erfordert eine ziemlich langwierige Rechnung, die zu folgendem Ergebnis führt

$$\begin{aligned} \int_{\varrho_i}^1 \bar{\Phi}^2 \bar{\psi} d\varrho &= \frac{p_1}{2} (1 - \varrho_i^2) - p_2 \ln \varrho_i + \frac{p_3}{4} (1 - \varrho_i^4) + \frac{p_4}{6} (1 - \varrho_i^6) + \frac{p_5}{8} (1 - \varrho_i^8) - \\ &- \frac{p_6}{10} (1 - \varrho_i^{10}) - \frac{p_7}{12} (1 - \varrho_i^{12}) - \frac{p_8}{14} (1 - \varrho_i^{14}) - \frac{p_9}{2} \left( 1 - \frac{1}{\varrho_i^2} \right) - \\ &- p_{10} \left\{ \frac{1}{4} (1 - \varrho_i^2) + \frac{\varrho_i^2}{2} \ln \varrho_i \right\} - p_{11} \left\{ \frac{1}{16} (1 - \varrho_i^4) + \frac{\varrho_i^4}{4} \ln \varrho_i \right\} - \\ &- p_{12} \left\{ \frac{1}{36} (1 - \varrho_i^6) + \frac{\varrho_i^6}{6} \ln \varrho_i \right\} + 2 \alpha_1^2 \alpha_2 \left\{ \frac{1}{64} (1 - \varrho_i^8) + \frac{\varrho_i^8}{8} \ln \varrho_i \right\} + \\ &+ \alpha_2^4 \left\{ \frac{\ln \varrho_i}{2 \varrho_i^2} + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\varrho_i^2} - 1 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (40)$$

Hierin bedeuten:

$$\begin{aligned} p_1 &= 2 \alpha_2 K_1 + \beta_1 K_2 - \frac{\beta_1}{4} \alpha_2^2, & p_2 &= 2 \alpha_2 K_2 + K_1 \alpha_2^2, \\ p_3 &= \beta_1 K_1 - \frac{\alpha_2 \beta_1}{2} + 2 \alpha_1 K_2 - \frac{\alpha_1 \alpha_2^2}{6}, & p_4 &= K_2 \alpha_1^2 - \frac{\alpha_1 \alpha_3}{3} - \frac{\beta_1^2}{4} + 2 \alpha_1 K_1 - \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2}{24}, \\ p_5 &= K_1 \alpha_2^2 - \frac{\alpha_1^2 \alpha_1}{12} - \frac{2}{3} \alpha_1 \beta_1, & p_6 &= \frac{\alpha_1^2}{3} + \frac{7}{24} \alpha_1^2 \beta_1, \\ p_7 &= \frac{\alpha_1^3}{4}, & p_8 &= \frac{\alpha_1^4}{24}, & p_9 &= K_2 \alpha_2^2, & p_{10} &= \alpha_2^2 \beta_1 - 4 \alpha_2^2, \\ p_{11} &= 2 \alpha_1 \alpha_2^2 - 2 \alpha_2 \beta_1, & p_{12} &= \alpha_1^2 \alpha_2^2 - 4 \alpha_1 \alpha_2, & p_{13} &= 2 \alpha_1^2 \alpha_2, & p_{14} &= \alpha_2^4. \end{aligned}$$



Mit den Zahlenangaben in Tabelle 4 ergeben sich aus Gleichung (40) folgende Werte

Tabelle 5

$\varrho_i$	0,1	0,3	0,5	0,7	Gleichung
$\int_{\varrho_i}^1 \overline{\Phi^2} \overline{\psi} d\varrho$	0,068085	0,149203	0,208311	0,119164	Gl. (40)
$\lambda_1$	1,5865	1,8083	2,2452	2,8069	Gl. (43)

Für die Durchbiegungskurve  $w(\varrho)$  folgt aus

$$-dw = \frac{h}{2\sqrt{3}} \Phi(\varrho) d\varrho = \frac{h}{2\sqrt{3}} C \left( \varrho + \alpha_1 \varrho^3 + \frac{\alpha_2}{\varrho} \right) d\varrho$$

nach Integration

$$w(\varrho) = \frac{hC}{2\sqrt{3}} \left( \frac{1-\varrho^2}{2} + \alpha_1 \frac{1-\varrho^4}{4} - \alpha_2 \ln \varrho \right);$$

es beträgt daher die Einsenkung  $w(\varrho_i)$  am Innenrand

$$\frac{w(\varrho_i)}{h} = \frac{C}{2\sqrt{3}} b_3 \quad (41)$$

worin der Wert  $b_3$  aus Gleichung (38) zu entnehmen ist (vgl. Tabelle 9). Mit Benützung von (41) läßt sich die kubische Gleichung (39) für  $C$  in eine solche für das Durchbiegungsverhältnis  $w_i/h$  überführen, wobei sich nach Ersatz von  $\Theta$  durch den in (9) angegebenen Ausdruck folgende Gleichung ergibt

$$\frac{w_i}{h} + \lambda_1 \left( \frac{w_i}{h} \right)^3 = \lambda_2 \nu. \quad (42)$$

Hierin bedeuten

$$\lambda_1 = - \frac{3(1-\mu^2)}{8\alpha_1 b_1 b_3^2} \int_{\varrho_i}^1 \overline{\Phi^2} \overline{\psi} d\varrho, \quad (43)$$

$$\lambda_2 = - \frac{3(b_1 - \varrho_i^2 b_3)(1-\mu^2)b_3}{4\alpha_1 b_1}. \quad (44)$$

Bei Beschränkung auf die lineare Biegungstheorie verschwindet  $\lambda_1$  gemäß Gl. (43) und es bleibt

$$\left( \frac{w_i}{h} \right)_{\text{linear}} = \lambda_2 \nu \quad (45)$$

als linearer Zusammenhang der Durchbiegung mit dem Plattenparameter  $\nu$ . Die Berücksichtigung der Membranwirkung ergibt aber hiefür gemäß Gl. (42) eine kubische Parabel. Die Gl. (45) ermöglicht die Beurteilung der Güte des unserer Rechnung zugrundegelegten Ansatzes (24) für  $\Phi(\varrho)$  durch Vergleich der hiemit erhaltenen Werte  $w_i/h$  mit den exakten Werten der linearen Theorie in nachstehender Tabelle:

Tabelle 6

$\varrho_i$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
$\lambda_2 = \frac{1}{\nu} \frac{w_i}{h}$	0,7523	0,839	0,6828	0,3547	0,0528
nach Tabelle 2	0,750	0,815	0,682	0,354	0,053
Abweichung in %	+0,3	+2,9	+0,12	+0,2	-0,4

Wenn die Ringplatte so dünn ist, daß ihre Biegesteifigkeit als verschwindend angesehen werden kann, dann liegt der Fall einer Kreisringmembrane vor; für diese vereinfachen sich die Grundgleichungen (6) und (7) in

$$L(\psi) + \frac{m \Phi^2}{\varrho} = 0,$$

$$\Phi \psi = \frac{\Theta}{2} (\varrho^2 - \varrho_i^2)$$

oder mit Einführung der dimensionslosen Membrankonstanten

$$\beta^* = \frac{p r_a}{E h}$$

und mit den Substitutionen

$$\Phi^* = \frac{\Phi h}{2 \sqrt[3]{3} r_a \sqrt[3]{\beta}},$$

$$\psi^* = \frac{\psi h^2}{12 m r_a^2 \sqrt[3]{\beta^2}}$$

in

$$L(\psi^*) + \frac{(\Phi^*)^2}{\varrho} = 0,$$

$$\Phi^* \psi^* = \varrho^2 - \varrho_i^2.$$

Die Integration dieser nichtlinearen Differentialgleichungen mit Hilfe von Potenzreihen verdankt man E. Schwerin<sup>8</sup>; es ergibt sich

$$w(\varrho_i) = r_a \omega_i \sqrt[3]{\frac{\beta^*}{2}},$$

woraus für das Einsenkungsverhältnis  $w_i/h$  mit Rücksicht auf  $\beta^* = \nu \frac{h^3}{r_a^3}$

$$\text{die einfache Formel} \quad \frac{w_i}{h} = \omega_i \sqrt[3]{\frac{\nu}{2}} \quad (46)$$

folgt. Hierin gilt für den nur vor der Innenlochzahl  $\varrho_i$  abhängigen Beiwert  $\omega_i$  nach Schwerin mit  $\mu = 0,3$

$\omega_i = 0,8225$	0,75	0,34
für $\varrho_i = 0,1$	0,5	0,9.

Mit Benutzung des Galerkinschen Verfahrens lassen sich übrigens einfache Formeln entwickeln, die nach den Vergleichsrechnungen des Verfassers<sup>9</sup> als praktisch vollkommen ausreichender Ersatz für die langwierigen Reihenentwicklungen gelten können.

<sup>9</sup> K. Federhofer, Luftfahrtforschung, Bd. 21 (1944), S. 8.

In den Abb. 2 und 3 ist die durch Gl. (42) gekennzeichnete Abhängigkeit des Einsenkungsverhältnisses  $w_i/h$  vom Plattenparameter  $\nu$  für die Innenlochzahlen  $q_i = 0,1$  und  $0,5$  in den Kurven III graphisch dargestellt, wobei auch jedesmal die der Gl. (46) entsprechende kubische Parabel und die Membranlösung (Kurve II) eingetragen ist (vgl. hierzu die nachstehende Tabelle 7).

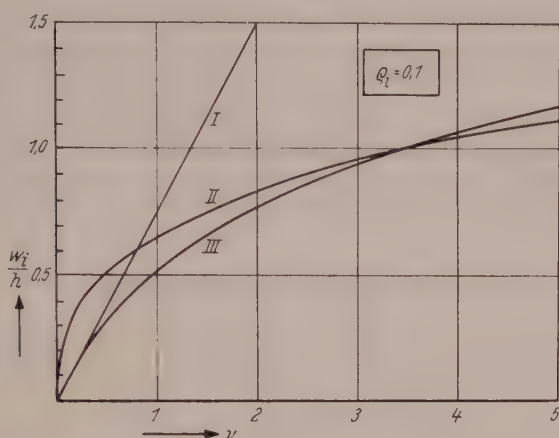


Abb. 2. Einsenkungsverhältnis  $\frac{w_i}{h}$  in Abhängigkeit vom Plattenparameter  $\nu$ . I lineare Biegetheorie, II Membrantheorie, III Nichtlineare Theorie

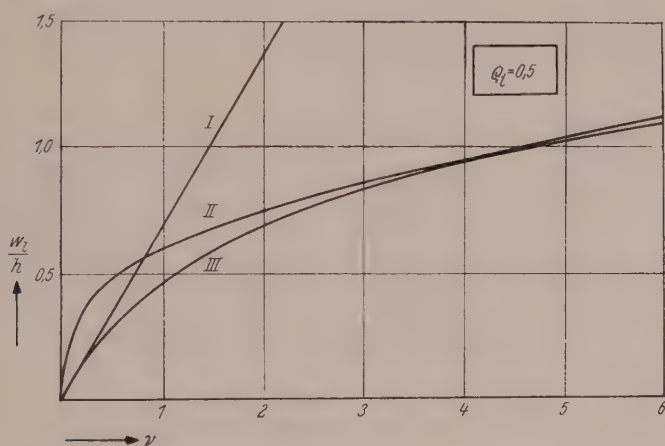


Abb. 3. Einsenkungsverhältnis  $\frac{w_i}{h}$  in Abhängigkeit vom Plattenparameter  $\nu$ . I lineare Biegetheorie, II Membrantheorie, III Nichtlineare Theorie

Tabelle 7

Plattenparameter  $\nu$  in Abhängigkeit von  $w_i/h$  und  $q_i$ . (Gl. 42 und Abb. 2 und 3).

$w_i/h$		0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
$q_i = 0,1$	$\nu$	0,283	0,667	1,253	2,143	3,438	5,239	7,648	10,765
$q_i = 0,5$	$\nu$	0,318	0,791	1,577	2,829	4,706	7,361	10,924	15,633

<sup>8</sup> Z. techn. Physik 10 (1929), S. 651.



Für sehr kleine Plattenparameter gelten die der gewöhnlichen Plattentheorie nach Gl. (45) entsprechenden geradlinigen Diagramme (Kurven I). Aus diesen Diagrammen sind die recht beträchtlichen Abweichungen abzulesen, die sich hinsichtlich der Einsenkungen des Innenrandes ergeben, wenn ihre Berechnung nach der linearen Biegetheorie der Ringplatte oder nach der Membrantheorie durchgeführt wird.

Bei einem Durchbiegungsverhältnis  $\frac{w_i}{h} \sim 1$  überschneiden sich die Kurven II und III; von diesem Bereiche an überschreiten die nach III gerechneten Einsenkungen  $w_i$  jene nach der Membrantheorie II. In diesem Bereiche großer Ausbiegungen genügt offenbar der dreigliedrige Näherungsansatz (24) zur Lösung der nichtlinearen Grundgleichungen nicht mehr und es müßte auf den viergliedrigen Ansatz (14) zurückgegriffen werden, womit freilich der Rechenaufwand sehr beträchtlich ansteigen würde (vgl. Bemerkung nach Gl. 23)

### III. Berechnung der Spannungen

Es überlagern sich die von den Biegemomenten  $G_1, G_2$  und von den Spannkraften  $T_1, T_2$  erzeugten Spannungen.

#### A.) Biegungsspannungen

Aus den Formeln (1) und (2) ergeben sich bei Beachtung von (5) für die Biegemomente die Formeln

$$G_1 = -\frac{Dh}{2\sqrt{3}r_a^2} \left( \frac{d\Phi}{d\rho} + \mu \frac{\Phi}{\rho} \right), \quad G_2 = -\frac{Dh}{2\sqrt{3}r_a^2} \left( \frac{\Phi}{\rho} + \mu \frac{d\Phi}{d\rho} \right);$$

mit dem Ansätze (24) für  $\Phi(\rho)$  folgt hieraus

$$G_1 = -\frac{Dh}{2\sqrt{3}r_a^2} C \left[ 1 + \mu + \alpha_1(3 + \mu)\rho^2 - \frac{\alpha_2(1 - \mu)}{\rho^2} \right],$$

$$G_2 = -\frac{Dh}{2\sqrt{3}r_a^2} C \left[ 1 + \mu + \alpha_1(1 + 3\mu)\rho^2 + \frac{\alpha_2(1 - \mu)}{\rho^2} \right].$$

Mit Verwertung der Gl. (41) und mit den Abkürzungen

$$g_1 = 1 + \mu + \alpha_1(3 + \mu)\rho^2 - \frac{\alpha_2(1 - \mu)}{\rho^2},$$

$$g_2 = 1 + \mu + \alpha_1(1 + 3\mu)\rho^2 + \frac{\alpha_2(1 - \mu)}{\rho^2}$$

ergibt sich

$$G_1 = -\frac{Dh}{b_3 r_a^2} \frac{w_i}{h} g_1, \quad G_2 = -\frac{Dh}{b_3 r_a^2} \frac{w_i}{h} g_2.$$

Die von diesen Biegemomenten in den Randfasern  $\pm \frac{h}{2}$  erzeugten Biegespannungen berechnen sich aus  $\frac{6G_1}{h^2}$  bzw.  $\frac{6G_2}{h^2}$  zu

$$\mp E \frac{h^3}{r_a^2} \gamma_1, \quad \text{bzw.} \quad \mp E \frac{h^3}{r_a^2} \gamma_2,$$

worin

$$\gamma_1 = \frac{1}{2(1 - \mu^2)b_3} \frac{w_i}{h} g_1, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2(1 - \mu^2)b_3} \frac{w_i}{h} g_2.$$

Da am freien Innenrande und am gelenkig gehaltenen Außenrande  $G_1 = 0$  ist, so gilt  $\gamma_1^a = 0$ ,  $\gamma_1^i = 0$ ; es erfahren diese Ränder demnach nur tangentielle Randspannungen

$$E \frac{h^2}{r_a^2} \gamma_2^a = E \frac{h^2}{r_a^2} B [(1 + \alpha_1 + \alpha_2) + \mu (1 + 3 \alpha_1 - \alpha_2)], \quad (47)$$

und

$$E \frac{h^2}{r_a^2} \gamma_2^i = E \frac{h^2}{r_a^2} B \left[ 1 + \mu + \alpha_1 (1 + 3 \mu) \varrho_i^2 + \frac{\alpha_2 (1 - \mu)}{\varrho_i^2} \right], \quad (48)$$

worin abkürzend  $\frac{1}{2(1 - \mu^2) b_3} \frac{w_i}{h} = B$  gesetzt wurde.

Die lineare Biegungstheorie liefert hingegen mit dem für  $\Phi(\varrho)$  zuständigen Ansatz (14)

$$\gamma_2^a = \frac{3}{8} \nu [(c_1^* - 2 \varrho_i^2) (1 + \mu) + 4 \mu \varrho_i^2 - (1 + 3 \mu) + c_2^* (1 - \mu)], \quad (49)$$

$$\gamma_2^i = \frac{3}{8} \nu \left[ (c_1^* - 2 \varrho_i^2) (1 + \mu) + 4 \mu \varrho_i^2 - (1 + 3 \mu) \varrho_i^2 + \frac{c_2^* (1 - \mu)}{\varrho_i^2} + 4 \varrho_i^2 (1 + \mu) \ln \varrho_i \right]. \quad (50)$$

Bezeichnet  $z$  die durch Gl. (20) bestimmte und aus der Tabelle 2 zu entnehmende Verhältniszahl  $w_i / \nu h$ , so kann der Beiwert  $3/8 \cdot \nu$  in den vorstehenden beiden Gleichungen durch den von  $w_i/h$  abhängigen Wert  $\frac{3}{8z} \frac{w_i}{h}$  ersetzt werden.

Die folgende Tabelle enthält die Werte  $\gamma_2^a/w_i/h$  und  $\gamma_2^i/w_i/h$  für die Lochzahlen  $\varrho_i = 0,1$  bis  $0,7$ .

Tabelle 8

$\varrho_i$	0,1	0,3	0,5	0,7	Gleichung
$\gamma_2^a : w_i/h$	0,71437	0,71997	0,9455	1,593	Gl. (47)
$\gamma_2^i : w_i/h$	3,2227	2,4284	2,1544	2,5045	Gl. (48)
$\gamma_2^a : w_i/h$	0,7178	0,74748	0,9635	1,6056	Gl. (49) Lineare Theorie
$\gamma_2^i : w_i/h$	3,172	2,3375	2,1153	2,4895	Gl. (50)

### B.) Membranspannungen

Für die von der Membranwirkung herrührenden Spannkkräfte  $T_1$ ,  $T_2$  liefern die Gl. (3) und (4) in Verbindung mit (37) und (8)

$$T_1 = E \frac{h^2}{r_a^2} \frac{h C^2}{48} \frac{\bar{\psi}(\varrho)}{\varrho}, \quad T_2 = E \frac{h^2}{r_a^2} \frac{h C^2}{48} \frac{d\bar{\psi}}{d\varrho};$$

es betragen daher die ihnen entsprechenden Membranspannungen

$$E \frac{h^2}{r_a^2} \tau_1, \quad E \frac{h^2}{r_a^2} \tau_2,$$

wobei die Zahlenwerte  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  durch

$$\tau_1 = \frac{C^2}{48} \frac{\bar{\psi}(\varrho)}{\varrho}, \quad \tau_2 = \frac{C^2}{48} \frac{d\bar{\psi}}{d\varrho}$$

bestimmt sind. Da am Außenrande  $\varepsilon_2 = \frac{1}{Eh} (T_2 - \mu T_1) = 0$ , so gilt dort die Beziehung

$$\tau_2^a = \mu \tau_1^a.$$

Entnimmt man  $\psi(\varrho)$  aus Gl. (36a) und (36) und beachtet Gl. (41), so ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{4b_3^2} \left( \frac{w_i}{h} \right)^2 \left[ K_1 + \frac{K_2}{\varrho^2} - \frac{\beta_1}{4} \varrho^2 - \frac{\alpha_1}{6} \varrho^4 - \frac{\alpha_1^2}{24} \varrho^6 - 2\alpha_2 \ln \varrho + \frac{\alpha_2^2}{\varrho^2} \ln \varrho \right], \\ \tau_2 &= \frac{1}{4b_3^2} \left( \frac{w_i}{h} \right)^2 \left[ (\bar{c}_3 - \alpha_2) - \left( \bar{c}_4 - \frac{\alpha_2^2}{2} \right) \frac{1}{\varrho^2} - \frac{3}{4} \beta_1 \varrho^2 - \frac{5\alpha_1}{6} \varrho^4 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{7\alpha_1^2}{24} \varrho^6 - 2\alpha_2 \ln \varrho - \frac{\alpha_2^2}{\varrho^2} \ln \varrho \right] \end{aligned}$$

mit den Sonderwerten  
am Außenrand ( $\varrho = 1$ ):

$$\tau_1^a = \frac{1}{4b_3^2} \left( \frac{w_i}{h} \right)^2 \left[ K_1 + K_2 - \frac{\beta_1}{4} - \frac{\alpha_1}{6} - \frac{\alpha_1^2}{24} \right], \quad (51)$$

$$\tau_2^a = \frac{1}{4b_3^2} \left( \frac{w_i}{h} \right)^2 \left[ (\bar{c}_3 - \alpha_2) - \left( \bar{c}_4 - \frac{\alpha_2^2}{2} \right) - \frac{3}{4} \beta_1 - \frac{5\alpha_1}{6} - \frac{7\alpha_1^2}{24} \right] \quad (52)$$

am Innenrand ( $\varrho = \varrho_i$ ):

$$\begin{aligned} \tau_1^i &= \frac{1}{4b_3^2} \left( \frac{w_i}{h} \right)^2 \left[ K_1 + \frac{K_2}{\varrho_i^2} - \frac{\beta_1}{4} \varrho_i^2 - \frac{\alpha_1}{6} \varrho_i^4 - \frac{\alpha_1^2}{24} \varrho_i^6 - \right. \\ &\quad \left. - 2\alpha_2 \ln \varrho_i - \frac{\alpha_2^2}{\varrho_i^2} \ln \varrho_i \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

Die Ergebnisse der Auswertung der vorstehenden Formeln für die Lochzahlen  $\varrho_i = 0,1$  bis  $0,7$  enthält die folgende Tabelle

Tabelle 9

$\varrho_i$	0,1	0,3	0,5	0,7	Gleichung
$b_3$	0,43986	0,55	0,55860	0,4226	(38)
$\tau_1^a : (w_i/h)^2$	0,54435	0,44127	0,38026	0,32375	(51)
$\tau_1^i$	0	0	0	0	
$\tau_2^a : (w_i/h)^2$	0,16331	0,13238	0,11408	0,09713	$= 0,3\tau_1^a$ , (52)
$\tau_2^i : (w_i/h)^2$	1,79221	1,7888	1,9006	2,4148	(53)

Für Vergleichszwecke seien noch jene radialen und tangentialen Spannungen  $\sigma_r, \sigma_t$  angegeben, die sich bei der Berechnung der Ringplatte als Kreisringmembrane nach E. Schwerin<sup>2</sup> ergeben.

Es ist

$$\sigma_r = E \frac{h^2}{r_a^2} \sigma_r \int \frac{3}{r^2}, \quad \sigma_t = E \frac{h^2}{r_a^2} \sigma_t \int \frac{3}{r^2},$$

somit

$$\tau_1 = \sigma_r \int \frac{3}{r^2}, \quad \tau_2 = \sigma_t \int \frac{3}{r^2}. \quad (54)$$



Die Beiwerte  $\bar{\sigma}_r$  und  $\bar{\sigma}_t$  sind in der Arbeit von Schwerin nur für die Lochzahlen  $\varrho_i = 0,1$  und  $0,5$  berechnet worden; ihre Sonderwerte für den Außen- und Innenrand sind aus nachstehender Tabelle zu entnehmen.

Tabelle 10

$\varrho_i$		0,1	0,5
Außenrand	$\bar{\sigma}_r^a$	1,04	0,62
	$\bar{\sigma}_t^a$	0,31	0,19
Innenrand	$\bar{\sigma}_r^i$	0	0
	$\bar{\sigma}_t^i$	2,722	2,33

Um auch hier  $T_1$  und  $T_2$  in Abhängigkeit von  $\frac{w_i}{h}$  auszudrücken, ist der Parameter  $\nu$  in den Formeln (54) durch den aus Gl. (46) folgenden Wert

$$\nu = \frac{2}{\omega_i^3} \left( \frac{w_i}{h} \right)^3$$

zu ersetzen. Hiemit wird

$$\tau_1 = \frac{\sigma_r}{2 \omega_i^2} \left( \frac{w_i}{h} \right)^2, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_t}{2 \omega_i^2} \left( \frac{w_i}{h} \right)^2. \quad (55)$$

Für den Innenrand ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} \text{bei } \varrho_i = 0,1: \quad \tau_2^i &= 2,0118 \left( \frac{w_i}{h} \right)^2 \\ \text{bei } \varrho_i = 0,5: \quad \tau_2^i &= 2,0712 \left( \frac{w_i}{h} \right)^2 \end{aligned} \quad (56)$$

Die Zahlenangaben der Tabellen für die Spannungswerte zeigen, daß die größte Beanspruchung der Ringplatte bei gleichmäßiger Belastung stets für alle Lochverhältnisse  $\varrho_i$  am Innenrand in tangentialer Richtung auftritt. Die Abb. 4 und 5, in denen die sowohl nach der strengen Theorie wie auch nach der linearen

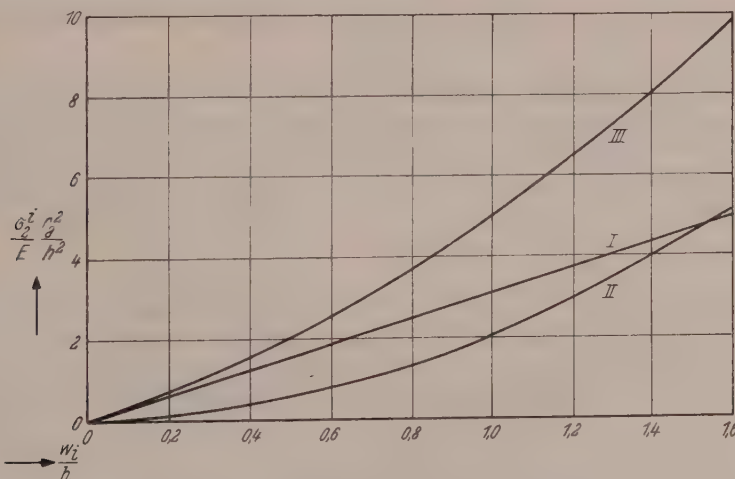


Abb. 4. Größte Spannung  $\sigma_t^i$  am Innenrande für  $\varrho_i = 0,1$ . I Lineare Theorie, II Membranlösung, III Strenge Lösung

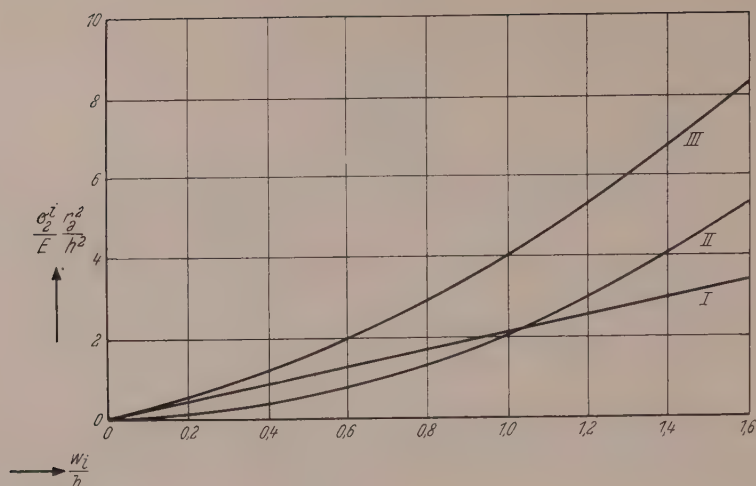


Abb. 5. Größte Spannung  $\sigma_2^i$  am Innenrande für  $\nu = 0.5$ . I Lineare Theorie, II Membranlösung, III Strenge Lösung

Biegungstheorie und nach der Membrantheorie berechnete Größtspannung  $\sigma_2^i$  in Abhängigkeit vom Einsenkungsverhältnisse  $w_i/h$  dargestellt ist, lassen die mit  $w_i/h$  stark zunehmenden Abweichungen der nach der Näherungstheorie erhaltenen erheblich kleineren Spannungswerte von den genauen Werten klar erkennen.

(Eingegangen am 20. April 1960)

## Der elastische Spannungszustand in einer durch eine Parabel begrenzten ebenen Scheibe infolge Einzellast im Kerbgrund

Von L. Föppl, München

Mit 2 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Ein vom Verfasser entwickeltes Verfahren zur Behandlung ebener Elastizitätsprobleme wird an einem Beispiel vorgeführt.

In der unter dem Titel „Zur konformen Abbildung ebener elastischer Spannungszustände“ in der Zeitschrift „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens“ erschienenen Arbeit\* hat der Verfasser gezeigt, daß die beiden Spannungsinvarianten eines elastischen ebenen Spannungszustandes, bezogen auf die krummlinigen Koordinaten  $u, v$  mit  $w = u + i v$  bzw.  $\bar{w} = u - i v$ , in vielen Fällen wiedergegeben werden durch:

$$\frac{\sigma_u + \sigma_v}{2} = \frac{1}{2} [\Phi(w) + \Phi(\bar{w})] \quad (1)$$

$$\frac{\sigma_u - \sigma_v}{2} + i \tau_{uv} = -\frac{1}{2} \frac{z(w)}{dz} \cdot \frac{d\Phi(\bar{w})}{d\bar{w}} + G_1(w) + G_2(\bar{w}). \quad (2)$$

\* Föppl L.: Zur konformen Abbildung ebener elastischer Spannungszustände. Forsch.-Ing.-Wes. 26 (1960) Nr. 6, 173/78.

Darin bedeuten

$$\begin{aligned} z &= x + i y = z(w) = z(u + i v) \\ \text{bzw. } \bar{z} &= x - i y = z(\bar{w}) = z(u - i v) \end{aligned} \quad (3)$$

den analytischen Ausdruck für den Übergang von den kartesischen Koordinaten  $x, y$  auf die rechtwinklig krummlinigen  $u, v$ ;  $z(w)$  ist dabei eine analytische Funktion von  $w$ .

Die in der zweiten Invariante nach Gl. (2) auftretenden Funktionen  $G_1(w)$  und  $G_2(\bar{w})$  sind reine Funktionen von  $w$  bzw. von  $\bar{w}$  allein und dienen dazu, die Grenzbedingungen zu befriedigen. Sie stellen für sich allein einen harmonischen Spannungszustand dar, für den die erste Invariante und damit  $\Phi$  verschwindet. Um dies nachzuweisen, sollen die zugehörigen Spannungen durch den Index  $o$  gekennzeichnet werden. Es gilt also die Beziehung:

$$\frac{\sigma_{uo} - \sigma_{vo}}{2} + i \tau_{uvo} = G_1(w) + G_2(\bar{w}). \quad (4)$$

Da

$$\begin{aligned} G_1(w) &= g_1(u, v) + i g_2(u, v) \\ G_2(\bar{w}) &= g_3(u, v) - i g_4(u, v) \end{aligned} \quad (5)$$

analytische Funktionen von  $w$  bzw.  $\bar{w}$  sind, so ist mit  $i = 1, 2, 3, 4$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) g_i(u, v) = 0. \quad (6)$$

Denkt man sich in irgendeinem Punkt des  $u, v$  Koordinatensystems in Richtung der Tangenten an die Netzkurven  $u = \text{const.}$  und  $v = \text{const.}$  ein kartesisches Koordinatensystem  $x, y$  gelegt, so lassen sich die Spannungen an diesem Punkt aus einer Airyschen Spannungsfunktion  $F_o(x, y)$  ableiten:

$$\sigma_{uo} = \frac{\partial^2 F_o}{\partial y^2}; \quad \sigma_{vo} = \frac{\partial^2 F_o}{\partial x^2}; \quad \tau_{uvo} = - \frac{\partial^2 F_o}{\partial x \partial y}. \quad (7)$$

Setzt man diese Werte für die Spannungen in Gl. (4) ein und wendet alsdann auf beide Seiten dieser Gleichung die Operation:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = h^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \quad (8)$$

an mit  $1/h$  als „Verzerrungsfaktor“, so verschwindet wegen Gl. (6) die rechte Seite der Gleichung. Damit auch die linke Seite zu null wird, muß  $\Delta F_o$  konstant oder gleich null sein:

$$\Delta F_o = \sigma_{uo} + \sigma_{vo} = 0. \quad (9)$$

Diese Überlegung gilt für jeden Punkt des durch den Index  $o$  gekennzeichneten Spannungszustandes. Da für ihn überall die Spannungssumme, d. h. die erste Invariante  $\Phi$  verschwindet, so handelt es sich um einen harmonischen Spannungszustand. Umgekehrt folgt aus dem Verschwinden der Spannungssumme nach Gl. (9), daß die zweite Invariante, die in Anlehnung an die Darstellung durch den Mohrschen Spannungskreis auch als „Kreisvektor“ bezeichnet wird, die Form von Gl. (4) mit beliebigen Funktionen  $G_1(w)$  und  $G_2(\bar{w})$  annimmt, wie auch in der oben angegebenen Arbeit gezeigt worden ist.



Die Bestimmung der Funktionen  $G_1(w)$  und  $G_2(w)$  erfolgt, wie schon erwähnt, aus den Grenzbedingungen. Sei etwa  $u = u_0$  ein lastfreier Rand, so daß hier überall  $(\sigma_u)_{u=u_0} = 0$  und  $(\tau_{uv})_{u=u_0} = 0$  sind, so folgt aus der durch Addition der Gl. (1) und (2) gewonnenen Beziehung

$$\sigma_u + i \tau_{uv} = \frac{1}{2} [\Phi(w) + \Phi(\bar{w})] - \frac{1}{2} \frac{z(w)}{\frac{dz}{dw}} \cdot \frac{d\Phi(\bar{w})}{d\bar{w}} + G_1(w) + G_2(\bar{w}) \quad (10)$$

die Randbedingung:

$$(\sigma_u + i \tau_{uv})_{u=u_0} = 0, \quad (11)$$

aus der sich die Funktionen  $G_1(w)$  und  $G_2(w)$  ermitteln lassen, wenn  $\Phi$  bekannt ist.

Für die Anwendungen ist auch die aus der Differenz der Gl. (1) und (2) sich ergebende Beziehung von Bedeutung:

$$\sigma_v - i \tau_{uv} = \frac{1}{2} [\Phi(w) + \Phi(\bar{w})] + \frac{1}{2} \frac{z(w)}{\frac{dz}{dw}} \cdot \frac{d\Phi(\bar{w})}{d\bar{w}} - G_1(w) - G_2(\bar{w}). \quad (12)$$

Aus dem folgenden, im Titel der Arbeit bezeichneten Beispiel dürfte die Anwendung der Gl. (10) bis (12) deutlich hervorgehen.

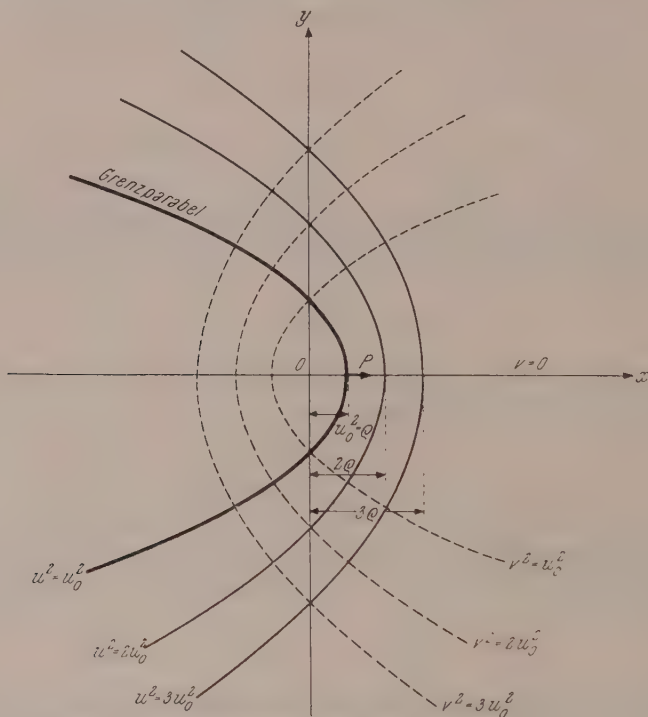


Abb. 1 Das parabolische Netz der Koordinaten  $u, v$

### Beispiel

Der Übergang von den kartesischen zu den parabolischen Koordinaten  $u, v$  erfolgt durch die Abhängigkeit:

$$z = x + i y = w^2 = (u + i v)^2, \quad (13)$$

woraus

$$x = u^2 - v^2; \quad y = 2uv$$

und damit

$$y^2 = 4u^2v^2 = 4u^2(u^2 - x) \quad (14a)$$

bzw.

$$y^2 = 4v^2(v^2 + x) \quad (14b)$$

hervorgeht. Aus diesen Gleichungen erkennt man, daß  $u^2 = \text{const}$  und  $v^2 = \text{const}$  Parabeln sind, die ein orthogonales Netz bilden (s. Abb. 1). Sie haben alle den Nullpunkt 0 des Koordinatensystems  $x, y$  als gemeinsamen Brennpunkt. Der Krümmungsradius im Schnittpunkt der Parabeln mit der  $x$ -Achse ist durch den Abstand dieses Punktes vom Brennpunkt 0 gegeben. Die Parabel  $u^2 = u_o^2$  sei die Begrenzung des Körpers, an der in der  $x$ -Achse die äußere Last  $P$  angreifen soll. Entweder kann man die Grenzparabel  $u^2 = u_o^2$  auf den sich nach links hin erstreckenden konvexen Körper oder auch auf den sich nach rechts erstreckenden konkaven Körper beziehen. Beide Fälle lassen sich mit den gleichen Hilfsmitteln untersuchen. Unseren weiteren Überlegungen soll der zweite Fall zugrunde gelegt werden, so daß  $P$  im Kerbgrund der parabolischen Begrenzung des sich nach rechts ins Unendliche erstreckenden Körpers angreift. Wird der Krümmungsradius der Grenzparabel mit  $\varrho$  bezeichnet, so gilt:

$$\varrho = u_o^2 \quad (15)$$

Durch diese Beziehung wird der Einheitsmaßstab festgelegt. Setzt man z. B.  $\varrho = u_o^2 = 1$ , so ist die Einheitslänge gleich dem Krümmungsradius im Kerbgrund der Grenzparabel.

Zu den Parabeln  $u^2 = \text{const}$  gehört als Grenzfall auch eine Gerade. Sie entspricht einem unendlich großen Wert von  $u^2$ . Würde sie die Begrenzung des Körpers darstellen, d. h.  $u_o^2 \rightarrow \infty$  sein, so käme man auf den wohlbekannten Spannungszustand in einer unendlichen Halbebene, hervorgerufen durch eine senkrecht zum Rand angreifende Einzellast  $P$ . Es entsteht ein vom Angriffspunkt der Kraft  $P$  auslaufender strahlenförmiger Spannungszustand, bei dem nur radiale Spannungen  $\sigma_r$  auftreten, die wie  $1/r$  abnehmen. Bildet man die Spannungssumme, so ergibt sich als maßgebender Faktor, mit dem  $1/r$  zu multiplizieren ist,

$$c = \frac{2P}{\pi} \quad (16)$$

Diese Überlegung behält auch für die unmittelbare Umgebung des Angriffspunktes von  $P$  im Fall der parabolischen Begrenzung des Körpers nach Abb. 1 ihre Gültigkeit. Man kann daher für die halbe Spannungssumme setzen:

$$\frac{\sigma_u + \sigma_v}{2} = \frac{1}{2} [\Phi(w) + \Phi(\bar{w})] = \frac{c}{2} \left| \frac{1}{z - u_o^2} + \frac{1}{\bar{z} - u_o^2} \right| = \frac{c}{2} \left| \frac{1}{w^2 - u_o^2} + \frac{1}{\bar{w}^2 - u_o^2} \right| \quad (17)$$

Für die weitere Rechnung werde  $c = 1$  gesetzt und erst am Schluß wird wieder der Wert von  $c$  nach Gl. (16) eingesetzt.

Aus

$$\Phi(w) = \frac{1}{w^2 - u_o^2}$$

folgt

$$\frac{d\Phi(w)}{dw} = -\frac{2w}{(w^2 - u_o^2)^2}$$

bzw.

$$\frac{d \Phi(\bar{w})}{d \bar{w}} = - \frac{2 \bar{w}}{(\bar{w}^2 - u_o^2)^2}$$

Damit geht für unser Beispiel Gl. (10) über in

$$\sigma_u + i \tau_{uv} = \frac{1}{2} \frac{1}{w^2 - u_o^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{w}^2 - u_o^2} + \frac{w \bar{w}}{2 (\bar{w}^2 - u_o^2)^2} + G_1(w) + G_2(\bar{w}), \quad (18)$$

Da die Randparabel  $u^2 = u_o^2$  bis auf den singulären Punkt, an dem die Kraft angreift, lastfrei ist, muß für sie — abgesehen von diesem Punkt — Gl. (11) gelten. Um diese Bedingung zu erfüllen, sind die Funktionen  $G_1(w)$  und  $G_2(\bar{w})$  folgendermaßen zu wählen:

$$\begin{aligned} G_1(w) &= - \frac{1}{2} \frac{1}{w^2 - u_o^2}; \\ G_2(\bar{w}) &= - \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{w}^2 - u_o^2} + \frac{\bar{w} (\bar{w} - 2 u_o)}{2 (\bar{w}^2 - u_o^2)^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Damit geht Gl. (18) über in

$$\sigma_u + i \tau_{uv} = \frac{\bar{w} (w + \bar{w} - 2 u_o)}{2 (\bar{w}^2 - u_o^2)^2} = + \frac{\bar{w} (u - u_o)}{(\bar{w}^2 - u_o^2)^2}. \quad (20)$$

Gl. (11) wird also befriedigt.

Gl. (12) lautet für unser Beispiel:

$$\sigma_v - i \tau_{uv} = \frac{1}{w^2 - u_o^2} + \frac{1}{\bar{w}^2 - u_o^2} - \frac{\bar{w} (u - u_o)}{(\bar{w}^2 - u_o^2)^2}. \quad (21)$$

Um die durch die Gl. (20) und (21) festgelegte Spannungsverteilung in der parabolisch begrenzten Scheibe näher zu beschreiben, bilde man für die  $x$ -Achse ( $v = 0$ ) nach Gl. (20)

$$(\sigma_u + i \tau_{uv})_{v=0} = \frac{u (u - u_o)}{(u^2 - u_o^2)^2} = (\sigma_u)_{v=0} \quad (22)$$

Aus Symmetriegründen muß  $(\tau_{uv})_{v=0} = 0$  sein, wie dies auch aus Gl. (22) hervorgeht. Die Verteilung der Spannungskomponente  $(\sigma_u)_{v=0}$  längs der Symmetrieachse ist auf Grund von Gl. (22) in Abb. 2 dargestellt. Dabei ist der Faktor  $\frac{2P}{\pi \varrho}$  wegen Gl. (15) und (16) einzusetzen. Da  $P$  eine Druckkraft ist, sind die Spannungen  $(\sigma_u)_{v=0}$  negativ. Aus Gl. (21) folgt:

$$(\sigma_v - i \tau_{uv})_{u=u_o} = \frac{1}{2 i u_o v - v^2} - \frac{1}{2 i u_o v + v^2} = - \frac{2}{4 u_o^2 + v^2} = (\sigma_v)_{u=u_o} \quad (23)$$

Die Schubspannung längs der Grenzparabel verschwindet; d. h.  $(\tau_{uv})_{u=u_o} = 0$ . Der Angriffspunkt der Last  $P$ , d. h.  $v = 0$ , ist dabei als singulärer Punkt auszuschalten. Die Spannung an diesem Punkt erhält man aus  $(\sigma_v)_{v=0}$  mit Hilfe von Gl. (21). Die damit gewonnene Spannungsverteilung  $(\sigma_v)_{v=0}$  längs der Symmetrieachse ist in Abb. 2 dargestellt, wobei auch wieder  $\frac{2P}{\pi \varrho}$  als Faktor hinzukommt. Für den Übergang der Parabelbegrenzung in eine geradlinige Begrenzung wird  $u_o^2$  und damit auch  $\varrho$  unend-



lich groß, so daß  $(\sigma_v)_{v=0} = 0$  wird, ein wohlbekanntes Resultat; ebenso wird in diesem Fall  $(\sigma_v)_{u=u_0} = 0$ , wie aus Gl. (23) hervorgeht. Um auch für Gl. (22) den Übergang zu  $u_0^2 \rightarrow \infty$  durchzuführen, setze man den Abstand eines Punktes der Symmetrieachse vom Angriffspunkt der Last  $P$  gleich  $r$ , so daß  $r = u^2 - u_0^2$  gilt. Damit folgt aus Gl. (22)

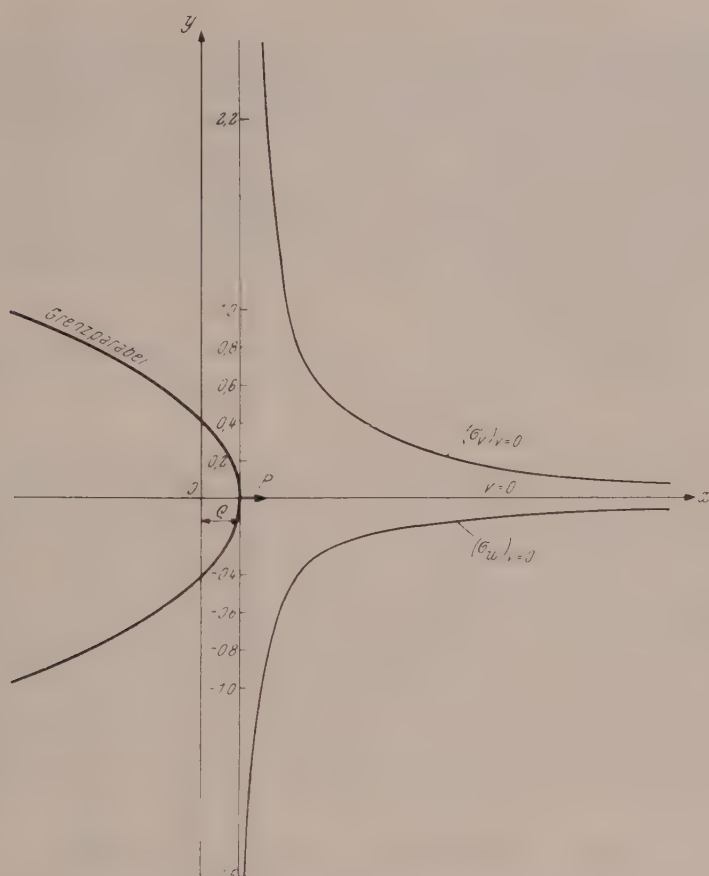


Abb. 2 Die Spannungen längs der  $x$ -Achse.

Den Zahlenwerten für die Spannungen ist als Faktor  $\frac{2P}{\pi^2}$  hinzuzufügen

$$(\sigma_u)_{\substack{v=0 \\ u_0^2 \rightarrow \infty}} = \frac{u^2 - u_0^2}{(u^2 - u_0^2)^2} = \left( \frac{r + u_0^2}{r^2} \cdot \frac{u_0^2}{r + u_0^2} \right)_{u_0^2 \rightarrow \infty} = \frac{1}{r}.$$

Fügt man noch den Faktor  $c$  nach Gl. (16) hinzu, so erhält man das für die Halbebene bekannte Resultat der Spannungen  $\sigma_x$  längs der  $x$ -Achse  $\sigma_x = \frac{2P}{\pi r}$ .

Da demnach alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind, stellen die Gleichungen (20) und (21) die strenge Lösung dar.

Es ist leicht einzusehen, daß auf dem eingeschlagenen Weg weitere Aufgaben der ebenen Elastizitätstheorie streng zu lösen sind.

(Eingegangen am 3. Oktober 1960)

# Magnetic Field Design in Thermonuclear Research

W. F. Gauster, Oak Ridge National Laboratory\*

Oak Ridge, Tennessee, USA.

With 15 Figures

**Summary.** Magnetic field and coil design, for controlled fusion research, is briefly described.

Since the ohmic losses in the magnet coils are often in the order  $10^6$  to  $10^7$  watts, power optimization is important. Some basic concepts of magnet coil optimization theory are briefly reported. A diagram shows the copperweight of long solenoids matched to a 6-Mw power supply as a function of field strength and coil length. The degree of homogeneity of magnetic fields in infinite arrays of coils can be conveniently calculated by means of forms derived by G. R. North.

Magnetic mirror fields with mirror ratios of 3,5 and extremely homogeneous central zones are required for DCX machines with helical ion orbits. For the design of these fields computer codes based on the minimization of the integral over the square of the field deviation are used. The fluctuation of the magnetic field strength along the magnetic axis inside a relatively long central zone is only a few parts in  $10^4$ .

Complicated calculations would be necessary to consider stray field effects; therefore a simple coil system has been used for experimental investigations. It is designed so that the zonal harmonics through the sixth order correspond to those of the original, complicated coil arrangement. The reproduction of the external field is very good.

As is well known, controlled nuclear fusion is the goal of intensive research activities at many places.<sup>1,2</sup> Experiments have been described<sup>3</sup>, using apparatus such as straight and toroidal pinch devices, the "Stellerator", the "DCX"-machine, "Ogra", "Scylla", "Astron" and many others. In all these experiments, magnetic fields, either generated by the discharge itself or produced by special coil arrangements, are supposed to confine the high energy plasma. "Magnetic Field Design" has already developed into an important part of the experimental technique of plasma physics<sup>4</sup>. During the last years intensive work in magnetic field and coil design has been done at the Oak Ridge National Laboratory motivated by the DCX-approach<sup>5</sup> in controlled fusion research. The following brief summary of these special development and research activities might serve as an example of this kind of work in general.

## I. Power Optimization of Large Magnet Coils

Fig. 1 shows a schematic cross section of a DCX machine with extension coils and long arc<sup>6</sup>. The axial magnetic field, produced by the mirror and extension coils is

\* Operated by Union Carbide Nuclear Company for the U.S. Atomic Energy Commission.

<sup>1</sup> Proceedings of the Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, September 1958. United Nations, Geneva 1958. Volume 31 (Theoretical and Experimental Aspects of Controlled Nuclear Fusion). Volume 32 (Controlled Fusion Devices).

<sup>2</sup> Proceedings of the Fourth International Conference on Ionization Phenomena in Gases. Uppsala, August 1959, Edited by N. Robert Nilsson. Volume II. North-Holland Publishing Company-Amsterdam, 1960.

<sup>3</sup> See for instance: A. S. Bishop, Project Sherwood (book), Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1958.

<sup>4</sup> Proceedings of Symposium on Magnetic Field Design in Thermonuclear Research, Gatlinburg, December 1958. Edited by W. F. Gauster, Oak Ridge National Laboratory, ORNL-2745 (1959).

<sup>5</sup> See for instance: Review Series No. 4, Recent Research on Controlled Thermonuclear Fusion, part III by Arthur H. Snell, International Atomic Energy Agency, Vienna 1960.

<sup>6</sup> C. F. Barnett et. al. DCX Operation and Performance, ORNL-2926, p. 1-27, Fig. 1.18.

represented in Fig. 27. The mirror coils<sup>8</sup> (Fig. 3) are designed for 6000 amps. d. c., the current density is 24,000 amps/in.<sup>2</sup>, axial water cooling removes the ohmic heat of 2780 kw per coil pair. Power losses of this and even higher magnitude are common

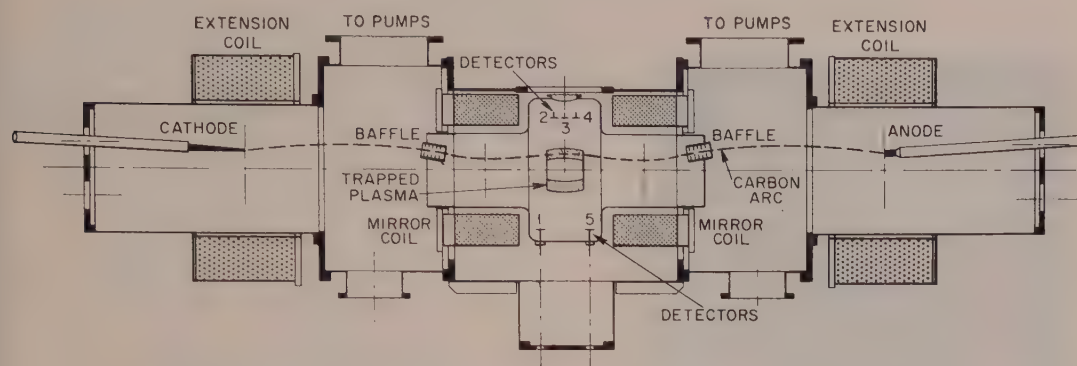


Fig. 1. Schematic Diagram of DCX Showing Extension Coils and Long Arc

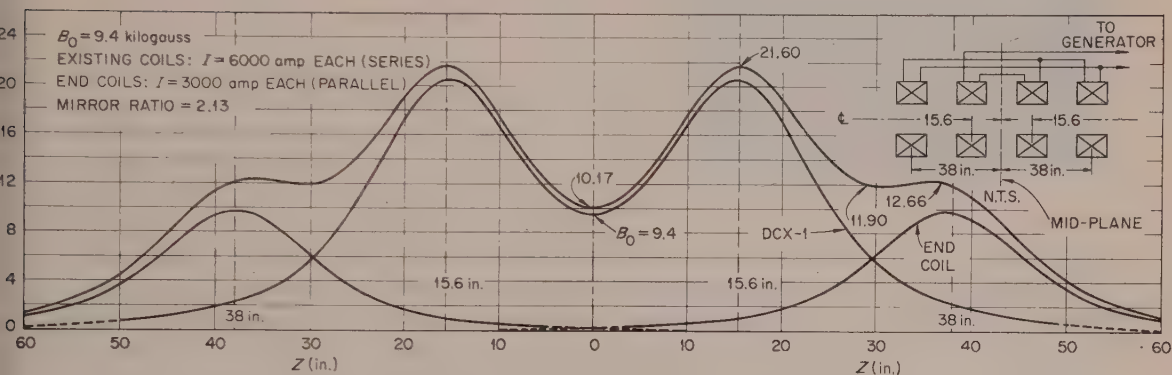


Fig. 2. Axial Field of DCX-1 with Additional Coils

for the magnet coils of several types of thermonuclear experimental devices, and therefore careful studies have been made on how to restrict the ohmic losses of field coils to a minimum. A radical solution is to reduce the ohmic resistance of magnet coils by keeping them at very low temperatures using liquid gas cooling. "Cryogenic Magnet Coils" could be of great importance for possible controlled fusion power production, since the ohmic losses of the magnet coils would influence decisively the overall efficiency. However, serious problems need careful consideration: the magneto resistance effect tends to upset the temperature resistance reduction, which is of special importance when high magnetic field strengths have to be produced. Thermonuclear reactions would cause radiation damage of the coil conductors, thus increasing their minimum resistance. Instead of copper or aluminium conductors of commercial

<sup>7</sup> R. L. Brown and D. L. Coffey, Graphical Methods for Designing Magnetic Fields and Ion Trajectories, ORNL-2802, p. 107-110, Fig. 8.2.2.

<sup>8</sup> E. S. Bettis, Magnetic Coil Design for DCX-1, see ref. (4) p. 8-9.



quality as used in conventional magnet coils, aluminium and sodium of highest purity seem to be the most promising metals for cryogenic coils. Much research and developmental work is still necessary.<sup>9</sup>

The conventional design of high power coils is based on fundamental work by Fabry<sup>10</sup>, Cockroft<sup>11</sup> and Bitter<sup>12</sup>. A very complete presentation of magnet coil design, including coil optimization, heat transfer and mechanical force problems has been published by F. Gaume<sup>13</sup>. Fabry showed that the magnetic field strength in gauss at the center of a magnet coil without ferromagnetic material can be expressed by

$$H_0 = G \sqrt{\frac{P\lambda}{\rho a_1}} \quad (1)$$

where  $P$  = ohmic loss power, in watts,

$\lambda$  = "space factor" =  

$$= \frac{\text{conducting cross section}}{\text{total cross section including insulation}}$$

$\rho$  = resistivity of the coil conductor, in ohm cm,

$a_1$  = inside radius of the coil, in cm.

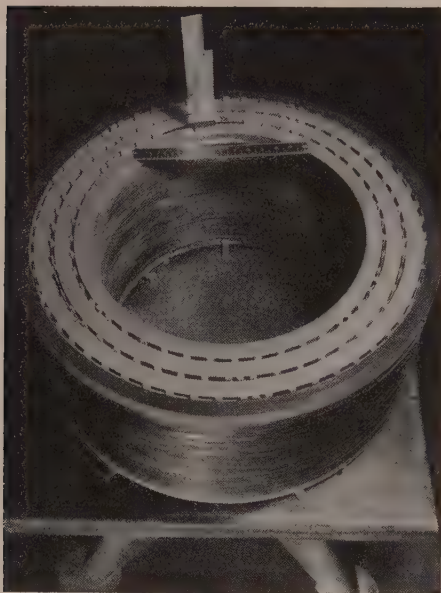


Fig. 3.  
Coil for Magnetic-Mirror Field in DCX-1

i.e. the production of a certain magnetic field strength with minimum ohmic losses in the coil, might be achieved by selecting appropriate coil shapes. Another possibility is to design the coil with variable  $i$  and  $\lambda$ , and even  $\rho$  might be assumed to be variable, dependent on the steady state temperature distribution in the coil winding. A coil which is symmetrical to a plane perpendicular to the coil axis and consists of coaxial homogeneous layers (Fig. 4) is power optimized when

$$\rho r s i = \text{constant}. \quad (2)$$

That is to say: A desired magnetic field strength in the center of a symmetrical coil is achieved with minimum power when the product of specific resistance  $\rho$ , the radial

<sup>9</sup> R. F. Post and C. E. Taylor in "Advances in Cryogenic Engineering", Vol. 5, Plenum Inc., New York, 1960.

C. E. Taylor and R. F. Post, p. 13-30, Ibid p. 31-37.

<sup>10</sup> Ch. Fabry, L'Eclairage Electrique, XVII, No. 43, p. 133-141 (1898); Journal de Physique IX, p. 129-134 (1910).

<sup>11</sup> J. D. Cockroft, Proc. Roy. Soc., CCXXVII A 654, p. 317-343 (1928).

<sup>12</sup> F. Bitter, RSI, VII (1936), p. 479-487, VIII (1937), p. 318-319, IX (1939), p. 373-381.

<sup>13</sup> F. Gaume: Journ. de Rech. du Centre Nat. de la Rech. Scient. (Bellevue), No. 43 (June 1958) and No. 45 (Dec. 1958). Translated into English by H. H. Kolm, Group Report M 81-12, Lincoln Laboratory, Lexington, Mass., Sept. 17, 1959.

distance  $r$  of a layer from the axis, the distance  $s$  of the layer end-point from the coil center, and the current density  $i$  in this layer is constant<sup>14</sup>.

## II. "Long Solenoids" for Arc Research

The "DCX" approach uses vacuum arcs for dissociating molecular into atomic ions. In these arcs plasma is produced with about  $5 \times 10^{13}$  ions per  $\text{cm}^3$  and around 50 electron volts energy, corresponding to approximately 600,000°  $K$  ion temperature. Vacuum arcs have been carefully studied in magnetic fields produced either by

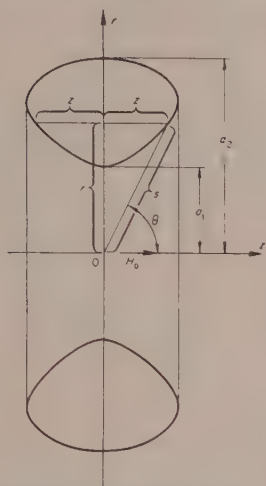


Fig. 4 Symmetrical Coil

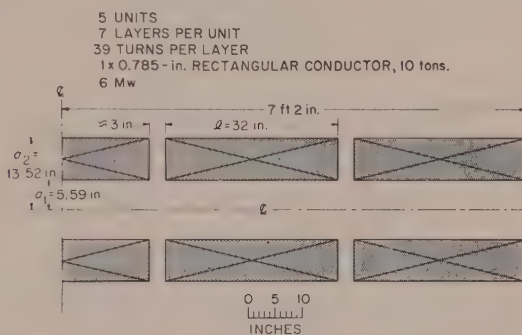


Fig. 5 Cross Section of 14-ft Solenoid

mirror coils (with mirror ratio around two) or by special solenoids (approximately 10 feet long with a magnetic field strength of several thousand gauss)<sup>15</sup>. After some time it appeared desirable to have available fairly homogeneous magnetic fields of 20 to 30 kilogauss. It was decided to build a new long solenoid for arc studies matched to an existing 6 Mw d-c power supply (8570 amperes, 700 volts).

Two different types of long solenoids were considered<sup>16</sup>. Fig. 5 shows the right symmetrical half of a design with altogether 4 openings between the 5 coil sections, providing space for 3 inch diagnostic portholes. For similar solenoids diagrams can be drawn representing the copper weight as a function of the maximum magnetic flux density, with the total length of the solenoid and the coil thickness (outside radius  $a_2$  minus inside radius  $a_1$ ) as parameters (Fig. 6). The point *A* on the diagram corresponds to a solenoid matched to the 6 Mw power supply, 14.5 ft. long, producing 32 kilogauss and having a copper weight of 20,000 lb.

Eventually it was decided to build another type of long solenoid with a greater number of larger diagnostic openings. End compensation coils were provided in order to extend the fairly homogeneous magnetic field over a greater part of the solenoid length.

<sup>14</sup> This and more general optimization theorems are discussed in W. F. Gauster, Some Basic Concepts For Magnet Coil Design, Conference Paper 59-1235, AIEE Fall General Meeting, Chicago, Illinois, October 1959.

<sup>15</sup> "Vacuum Arc Research", ORNL 2926, p. 28—59.

<sup>16</sup> W. F. Gauster and J. N. Luton, Jr.: Design of Long Solenoids for Arc Studies, ORNL-2802, p. 111–113.





### III. Magnetic Fields of Infinite Lumped Solenoids

The magnetic field in the center zone of a long solenoid can be well approximated by the field produced by an infinite array of coils forming a straight, infinite, "lumped" solenoid. These magnetic fields can be represented by Fourier Series as shown by G. R. North<sup>17</sup>. He starts by calculating the axial field of an infinite loop array. Using the designation shown in Fig. 8, the flux density on the axis is

$$B_{z0} = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[(z - k\lambda)^2 + R^2]^{3/2}} \quad (3)$$

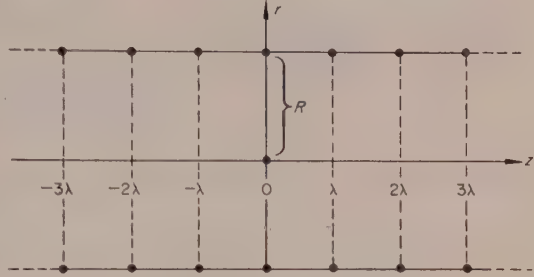


Fig. 8 Infinite Loop Array

Since  $B_{z0}$  must be a periodic function with maxima below the loops and minima between them

$$B_{z0} = \beta + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cos \frac{2\pi}{\lambda} n z \quad (4)$$

As shown by North

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{\mu_0 I}{\lambda} \\ \gamma_n &= \frac{4\pi\mu_0 I}{\lambda} n \frac{R}{\lambda} K_1\left(2\pi n \frac{R}{\lambda}\right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$K_1\left(2\pi n \frac{R}{\lambda}\right)$  stands for a modified Bessel function of the second kind<sup>18</sup>. For large values of the argument,  $K_1(x)$  may be expressed by the asymptotic relation

$$\left. \begin{aligned} K_1(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \\ x &\gg 1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Therefore

$$\left. \begin{aligned} \gamma_n &\simeq 2\pi\mu_0 I \sqrt{\frac{nR}{\lambda^3}} e^{-n \frac{2\pi R}{\lambda}} \\ n \frac{2\pi R}{\lambda} &\gg 1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

For large values of the argument only the first two terms of the Fourier expansion are significant. Introducing the axial field strength  $B_{\text{sol.}}$  of a solenoid with a homogeneous winding of equal number of ampere turns per unit length

$$B_{\text{sol.}} = \frac{\mu_0 I}{\lambda} \quad (8)$$

Eqn. (4), (5) and (7) yield

<sup>17</sup> G. R. North: Some Properties of Infinite, Lumped Solenoids, ORNL-2975 (Aug. 1960).

<sup>18</sup> See for instance W. R. Smythe, Static and Dynamic Electricity (book), McGraw-Hill, Book Comp., Inc., 1950, p. 187.

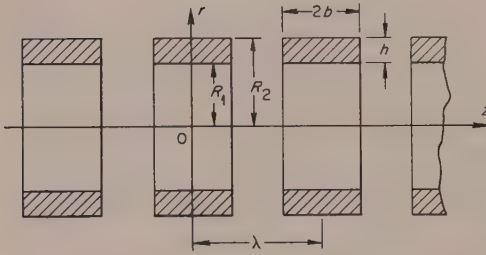
$$B_{z0} \cong \left( 1 + 2\pi \sqrt{\frac{R}{\lambda}} e^{-\frac{2\pi R}{\lambda}} \cos \frac{2\pi}{\lambda} z \right) B_{\text{sol.}} \quad (9)$$

Using this approximation North shows, that the order of magnitude of the “ripples” of the axial field varies from  $10^{-2} B_{\text{sol.}}$  to  $10^{-8} B_{\text{sol.}}$  if  $\frac{\lambda}{R}$  is varied between 1 and 1/4. In a cylindrical coordinate system ( $z$ ,  $r$  and  $\theta$ ), the magnitude of the vector potential is

$$A = A_\theta = B_{\text{sol.}} \left[ \frac{r}{2} + \frac{4\pi R}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} n K_1 \left( n \frac{2\pi R}{\lambda} \right) I_1 \left( n \frac{2\pi r}{\lambda} \right) \cos \left( n \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \right]; \quad (10)$$

the components of the magnetic flux density for points off the axis are

$$\left. \begin{aligned} B_z &= B_{\text{sol.}} \left[ \frac{r}{2} + \frac{4\pi R}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} n K_1 \left( n \frac{2\pi R}{\lambda} \right) I_0 \left( n \frac{2\pi r}{\lambda} \right) \cos \left( n \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \right] \\ B_r &= B_{\text{sol.}} \left[ \frac{4\pi R}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} n K_1 \left( n \frac{2\pi R}{\lambda} \right) I_1 \left( n \frac{2\pi r}{\lambda} \right) \sin \left( n \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \right] \\ B_\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$



$I_0$  and  $I_1$  stand for modified Bessel functions of the first kind<sup>18</sup>.

For an infinite array of coils, as shown in Fig. 9, G. R. North<sup>17</sup> found the following approximate solution for the axial magnetic flux density

Fig. 9 Infinite Lumped Solenoid

$$B_{z0} = B_{\text{sol.}} \frac{2b}{\lambda} \left\{ 1 + \frac{\lambda^2}{2\pi b h} \left[ \sqrt{\frac{a_1}{\lambda}} e^{-\frac{2\pi a_1}{\lambda}} - \sqrt{\frac{a_2}{\lambda}} e^{-\frac{2\pi a_2}{\lambda}} \right] \sin \frac{2\pi b}{\lambda} \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \right\} \quad (12)$$

#### IV. Magnetic Mirror Fields With Extremely Homogeneous Central Zones<sup>19</sup>

In experimental devices like “Ogra” and the planned new versions of the DCX machine (DCX-EPB and DCX-2) the injected molecular ions are assumed to move in helical orbits with a small pitch angle in order to achieve a large path length. An ideal magnetic field configuration would consist of two magnetic mirrors and a central zone which is perfectly homogeneous, with the exception of a “field dip” which serves to change the injection angle (as determined by an ion injection snout) into the pitch angle of the helix<sup>20</sup>. Because of the necessary accessibility (port holes for plasma diagnostics and space for ion injection snout), lumped magnet coils must be provided and it is therefore impossible to make the central zone perfectly homogeneous. G. R. North’s calculations for an infinite array of lumped solenoids, as discussed in the previous section predict for similar coil dimensions a ripple amplitude in the order of several

<sup>17</sup> S. S. 81.

<sup>18</sup> S. S. 81.

<sup>19</sup> D. L. Coffey, W. F. Gauster and J. E. Simpkins, TSR 7-31-60.

<sup>20</sup> P. R. Bell et al., DXC-2 Design, TSR 7-31-60.

parts in  $10^5$ . One cannot expect to produce the same extremely good homogeneity in the central magnetic field zone of a DCX-device, since only a limited number of coils can be provided, and since the magnetic field strength has to increase over a short distance to the full value under the mirror coils, i.e. to 350%.

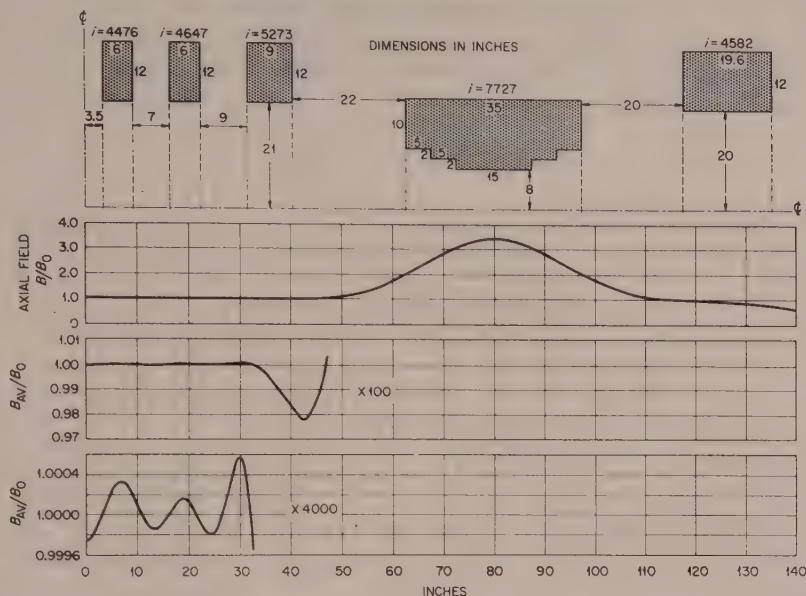


Fig. 10 Magnetic Field Design of DCX-2

Fig. 10 shows a proposed coil arrangement for DCX-2; because of symmetry it is sufficient to draw only one quadrant. The dimensions are indicated in inches, the current densities  $i$  are referred to the total coil cross sections and are expressed in amperes per square inch. The power dissipated in one mirror coil is assumed to be 6 Mw (producing a magnetic flux density of 59 kilogauss), and each outside booster coil is energized with 0.875 Mw.

In Fig. 10 three plots in different scales represent the axial magnetic flux density component  $B_z$ , normalized to the value at the center of the coil system. For calculating the appropriate "field dip" the average flux density

$$B_{av}(z) = \frac{5}{8} B_z(z, 0) + \frac{3}{8} B_z(z, r = 10'') \quad (13)$$

is used instead of the component  $B_z$  on the axis<sup>21</sup>.

The first plot shows the homogeneous central zone extending on both sides of the center for a distance of more than 30 inches. The mirror ratio is approximately 3.5. On the second plot, drawn 100 times enlarged, the field dip is easily recognizable. By a favorable coincidence, the field dip resulted as a "byproduct" of the optimization performed in order to achieve the best homogeneity of the central zone. The scale of the third plot is 4000 times enlarged.  $B_{av}$  ripples of several parts in  $10^4$  can be seen; the ripples of  $B_z(z, 0)$  are still appreciably smaller. From this fact, it follows that the ripples of the DCX-2 coil arrangement are only a few times larger than those of a corresponding infinite coil array. This result seems to be very satisfactory when the relatively large mirror ratio 3.5 is considered.

<sup>21</sup> R. J. Mackin, Jr., unpublished ORNL report on Particle Orbits in DCX-2.



For the field design shown in Fig. 10 the following procedure was used, which is similar to the method of "Fitting Magnetic Fields over Specified Volumes"<sup>22</sup>. As it was mentioned previously, the mirror coils and the outside booster coils have been matched to the power of existing DC generators of 6 Mw and 0.875 Mw respectively. All geometrical coil dimensions, including distances between the coils, have been assumed for a first trial calculation. Free variables are the current densities  $i_1$ ,  $i_2$  and  $i_3$  in the three inside booster coil pairs, and the average flux density  $B_0$  in the central zone. The field deviation along the axis is

$$\Delta B = B_z(z) - B_0 \quad (14)$$

The optimization is performed by making

$$\int_0^L (\Delta B)^2 dz \rightarrow \text{minimum} \quad (15)$$

or

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial i_k} \int_0^L (\Delta B)^2 dz &= 0 \\ k &= 1, 2, 3 \\ \frac{\partial}{\partial B_0} \int_0^L (\Delta B)^2 dz &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$L$  stands for the half-length of the central zone. From Eq. (16) the current densities  $i_k$  and  $B_0$  can be obtained by solving four linear equations ("optimization with floating mirror ratio"). In order to achieve finally the desired  $B_0$  value, the procedure has to be repeated with other distances between the mirror coils. Computer codes have been programmed<sup>23</sup> which permit performing this optimization procedure for any similar coil arrangement in a very convenient way.

## V. External Fields

The external fields of experimental devices such as DCX-EPB and DCX-2 are of special interest for the following reasons:

1. Large stray fields will affect measuring instruments in the vicinity of these machines.

2. Ferromagnetic materials magnetized by the external field (steel reinforcement of the concrete floor, etc.) could significantly affect the internal field of such a device.

In order to avoid cumbersome and questionable calculations about the field perturbations, experiments are desirable using a coil system ("model") which simulates the original external field. The simplest model would consist of one pair coils only, but since the DCX device is of appreciable axial extension, the outside field would be sufficiently simulated at great distances only. Therefore a model made of at least two pairs of coils should be used.

<sup>22</sup> W. F. Gauster, Fitting of Magnetic Fields over Specified Volumes, ORNL-2926, p. 84 and E. W. Laing, A Note on Magnetic Field Shaping, UKAEA AWRE (Harwell), report M 522.

<sup>23</sup> G. R. North and M. Rankin, Magnetic Field Codes, TSR 7-31-160.

The starting point of the calculation is a development of the original field in Legendre polynomials:<sup>24</sup>

$$B_{Iz} = \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k} P_{2k}(\cos \theta) \varrho^{-(2k+1)} \quad (17)$$

$\varrho$  and  $\theta$  are the spherical coordinates of a field point in the rotationally symmetric magnetic field.

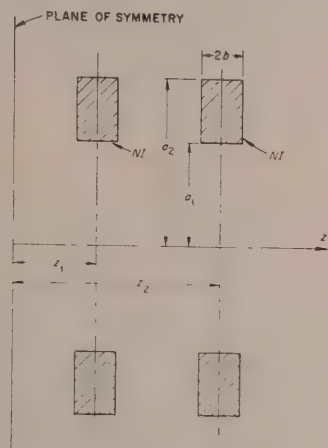


Fig. 11 Model Coils

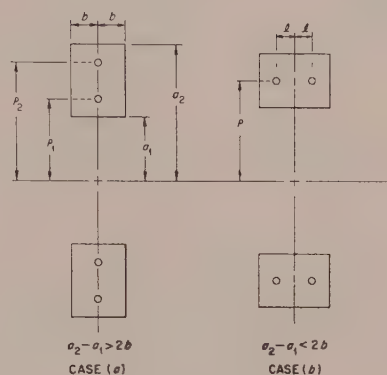


Fig. 12 Lyle's Theorem

The model (Fig. 11) is determined if the three quantities  $z_1$ ,  $z_2$  and  $NI$  are known since existing coils of known dimensions are to be used for building the model. The ampere turns of all coils are supposed to be equal, which simplifies the performance of the experiment. The external magnetic field of the model, developed in Legendre polynomials, is

$$B_{IIz} = \sum_{k=1}^{\infty} K_{2k} P_{2k}(\cos \theta) \varrho^{-(2k+1)} \quad (18)$$

Since  $z_1$ ,  $z_2$  and  $NI$  are free parameters it is possible to satisfy three equations<sup>25</sup>

$$\begin{aligned} K_2 &= C_2 \\ K_4 &= C_4 \\ K_6 &= C_6 \end{aligned} \quad (19)$$

The coefficients  $K_{2k}$  are linear functions of  $NI$ , but depend in a very complicated way on  $z_1$  and  $z_2$ . It would be possible to find  $z_1$  and  $z_2$  by means of a computer code based on Garrett's development of fields produced by coils with solid cross sections in Legendre polynomials. For our purposes, however, it is sufficient to simplify the problem by using Lyles' Theorem.<sup>26</sup> This theorem says the following: The magnetic field

<sup>24</sup> M. W. Garrett: Axially Symmetric Systems for Generating and Measuring Magnetic Fields, Part I, Journal of Appl. Phys., 22, No. 9, p. 1091—1107 (Sept. 1951), M. Rankin and W. F. Gauster, Computation of Magnetic Fields and Ion Beam Trajectories, ORNL-2802, p. 105—107 and W. F. Gauster, Harold Moth and C. E. Parker, Simulation of Axially Symmetrical Magnetic Fields, T S R 7-31-60.

<sup>25</sup> Compare a similar problem: A. and F. Sauter: Ztschrft. f. Phys., 122, p. 120 (1940).

<sup>26</sup> T. R. Lyle: Phil. Mag. 3 (sixth series) p. 310 (1910). Compare J. Hak: Eisenlose Drossel-spulen (book), K. F. Koehler Verlag, Leipzig, 1938, p. 38.

produced by a solenoid with rectangular cross section and constant current density can be approximated by the field of two loops. In case (a) (See Fig. 12)

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{a_1 + a_2}{2} \left[ 1 + \frac{2}{3} \left( \frac{b}{a_1 + a_2} \right)^2 \right] - \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\left( \frac{a_2 - a_1}{2} \right)^2 - b^2} \\ r_2 &= \frac{a_1 + a_2}{2} \left[ 1 + \frac{2}{3} \left( \frac{b}{a_1 + a_2} \right)^2 \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\left( \frac{a_2 - a_1}{2} \right)^2 - b^2} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

in case (b)

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{a_1 - a_2}{2} \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1} \right)^2 \right] \\ l &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{b^2 - \left( \frac{a_2 - a_1}{2} \right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

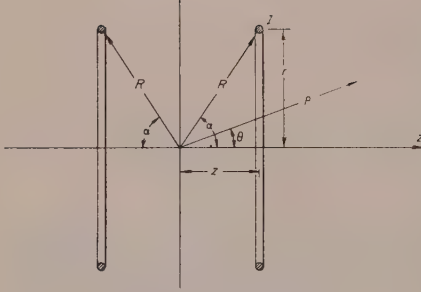


Fig. 13 Loop Pair

In both cases the number of ampere turns of each loop is half of the original number of ampere turns. This approximation is not based on the identity of a certain number of Legendre coefficients of the solid coil and the equivalent loops respectively. Rather all corresponding coefficients differ slightly from each other; however, for cross sections not too large compared to the mean radius, the approximation is very good.

The external magnetic field produced by one loop pair is (See Fig. 13)

$$B_z = \frac{2\pi}{5} \frac{I \sin^2 \alpha}{R} \sum_{k=1}^{\infty} P'_{2k}(\cos \alpha) P_{2k}(\cos \theta) \left( \frac{R}{\rho} \right)^{(2k+1)} \quad (22)$$

Cylindrical coordinates are introduced ( $r = R \sin \alpha$ ,  $z = R \cos \alpha$ ). Then the first three coefficients of a Legendre polynomial development which represents the field produced by the four loop pairs equivalent to the two coil pairs of the model (See Fig. 11) are:

$$\left. \begin{aligned} K_2 &= \frac{2\pi}{5} NI (r_1^2 + r_2^2) \\ K_4 &= \frac{3\pi}{5} NI [2 (r_1^2 + r_2^2) (z_1^2 + z_2^2) - (r_1^4 + r_2^4)] \\ K_6 &= \frac{3\pi}{4} NI [4 (r_1^2 + r_2^2) (z_1^4 + z_2^4) - 6 (r_1^4 + r_2^4) (z_1^2 + z_2^2) + (r_1^6 + r_2^6)] \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

In these equations  $r_1$  and  $r_2$  follow from Eqn. (20);  $NI$ ,  $z_1$  and  $z_2$  are unknowns. Using the identities Eq. (19) all unknowns are easily calculated since Eq. (23) are linear in  $NI$  and quadratic in  $z_1^2$  and  $z_2^2$ .

Of course the model coils are not to be operated with a current corresponding to the calculated very high number of ampere turns  $NI$ , rather with a convenient current. Fig. 14 shows  $B_z$  measured along the axis for the original DCX-2 coil arrangement



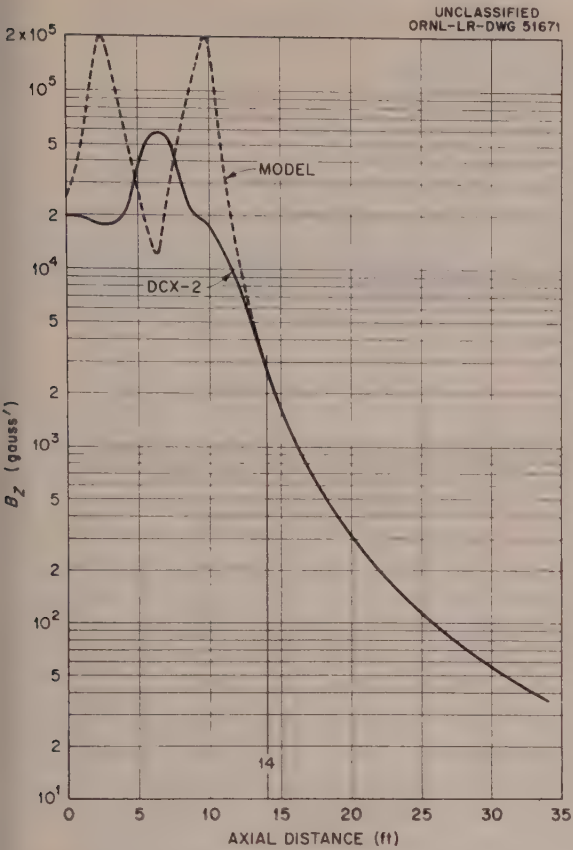


Fig. 14 Axial Fields of DCX-2 and Equivalent 4-Coil Model

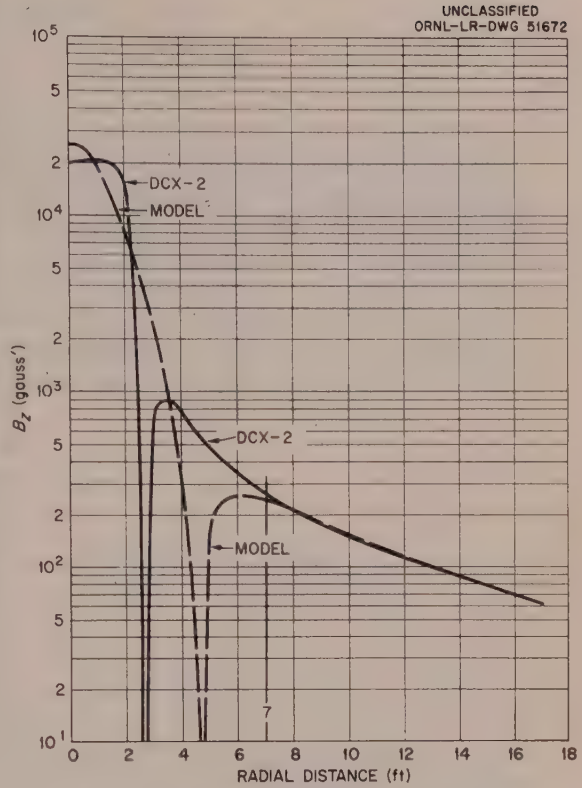


Fig. 15 Fields of DCX-2 and Equivalent 4-Coil Model in the  $Z = 0$  Plane

(solid line) and for the model (dashed line). Finally Fig. 15 represents  $B_z$  measured in the plane of symmetry. The approximation is very good beyond  $z = 14'$  in case *A* and beyond  $r = 7'$  in case *B*. Experiments with the model yielded the desired information on the influence of the unavoidable ferromagnetic (steel) construction elements on the magnetic field around the future position of DCX-2.

(Received, September 26, 1960)

\* The following ORNL reports are cited with the ORNL number only:

Thermonuclear Project Semiannual Report For Period Ending January 31, 1959, ORNL-2693  
 Thermonuclear Project Semiannual Report For Period Ending July 31, 1959, ORNL-2802  
 Thermonuclear Project Semiannual Report For Period Ending January 31, 1960, ORNL-2926  
 Thermonuclear Project Semiannual Report For Period Ending July 31, 1960  
 is cited as TSR 7-31-60.

# Theorie einer Versuchsanordnung zur Messung der Werkstoffdämpfung

Von G. Heinrich und K. Desoyer, Wien

Mit 7 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Im folgenden wird eine Theorie des Zusammenhanges zwischen den Dämpfungseigenschaften und der Verformung eines um seine Achse rotierenden kreiszylindrischen querbelasteten Probestabes entwickelt. Die Untersuchung wird für einen Werkstoff mit statischer Hysterese und einen mit Hysterese kombinierten Kelvin-Körper durchgeführt. Damit sollen exaktere Grundlagen für die Auswertung der Ergebnisse eines bekannten Meßverfahrens gegeben werden.

A. L. Kimball und D. E. Lovell<sup>1</sup> haben bereits 1927 eine einfache Versuchsanordnung zur Messung der Werkstoffdämpfung vorgeschlagen, deren Prinzip in Abb. 1 dargestellt ist. Ein zylindrischer Probestab aus dem zu untersuchenden Werk-

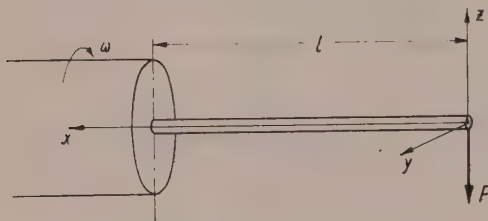


Abb. 1. Schema der Meßanordnung

stoff wird an einem Ende eingespannt, am anderen, freien Ende mit einem Gewicht belastet. Läßt man nun die Einspannvorrichtung rotieren, dann wandert das freie belastete Ende des Stabes im allgemeinen in horizontaler und vertikaler Richtung aus. Dieser Effekt kann zur quantitativen Erfassung der Werkstoffdämpfung herangezogen werden. Der Zusammenhang zwischen den beobachtbaren Größen der Verschiebungen und den Dämpfungsparametern hängt natür-

lich vom Mechanismus dieser Dämpfung ab, der für verschiedene Materialien verschieden sein kann. Soweit den Verfassern bekannt ist finden sich in der Literatur zur Theorie dieser Methode nur allgemeine, auf energetischen Überlegungen beruhende Ansätze, die von physikalisch nicht realen Ersatzkräften Gebrauch machen.

Im folgenden soll versucht werden, eine eingehendere Theorie der Zusammenhänge zwischen den beobachtbaren Verschiebungen des belasteten Stabendes und den die Werkstoffdämpfung charakterisierenden Kennzahlen für verschiedene Werkstofftypen zu entwickeln. Dies erscheint besonders in Hinblick auf die in den letzten Jahren erfolgte Klassifizierung verschiedener Typen nicht Hooke'scher Werkstoffe von Interesse<sup>2</sup>.

## I. Werkstoffe mit statischer Hysterese

Zunächst soll ein Werkstoff betrachtet werden, der bei einem Belastungszyklus eine Spannungs-Dehnungs-Hysterese schleife gemäß Abb. 2 durchläuft, die nicht von der Deformationsgeschwindigkeit abhängen soll („statische Hysterese“)<sup>3</sup>. Analytisch werde die Schleife in folgender Weise beschrieben:

$$\text{Bereich A bis B} \quad \varepsilon + \varepsilon_0 = \sigma^* \cdot (1 + \kappa |\sigma^*|^\alpha) \quad (1)$$

$$\text{Bereich B bis C} \quad \varepsilon - \varepsilon_0 = \sigma^* \quad (2)$$

<sup>1</sup> A. L. Kimball und D. E. Lovell, Internal Friction in Solids, Phys. Rev. 30, 948–959, (1927).

<sup>2</sup> Siehe z. B. Beitrag von A. M. Freudenthal und H. Geiringer im Handbuch der Physik, Bd. VI, S. 229 ff. (1958), Springer-Verlag.

<sup>3</sup> Z. B. Structural Damping, Herausgeber J. E. Ruzicka, Beitrag von B. J. Lazan (1960), Pergamon Press.

$$\text{Bereich C bis D } \varepsilon - \varepsilon_0 = \sigma^* \cdot (1 + \kappa |\sigma^*|^\alpha) \quad (3)$$

$$\text{Bereich D bis A } \varepsilon + \varepsilon_0 = \sigma^* \quad (4)$$

$$\text{mit } \sigma^* = \frac{\sigma}{E} \quad (5)$$

Hierin bedeuten  $\varepsilon$  die Dehnung,  $\sigma$  die Spannung eines einachsigt belasteten Volumselementes und  $E$  den Grenzwert des Elastizitätsmoduls für verschwindende Spannung.  $\kappa$  und  $\alpha$  sind Materialkonstanten, die aus den Verschiebungen des freien Stabendes bei stationärer Bewegung ermittelt werden sollen. Mit den üblichen Näherungen der technischen Biegelehre (Bernoullische Hypothese, Vernachlässigung der Schubspannungsdeformation, Theorie erster Ordnung) läßt sich die Dehnung in einem Querschnitt senkrecht zur Stabachse in der Form

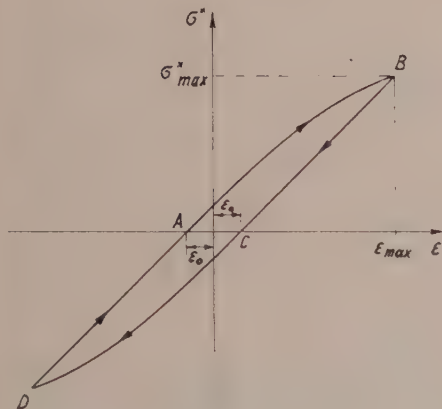


Abb. 2. Hystereseschleife

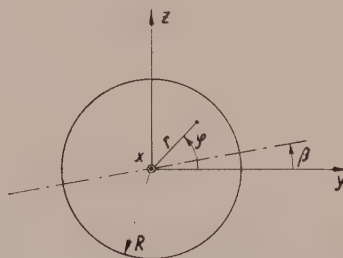


Abb. 3. Stabquerschnitt, von der Einspannstelle aus gesehen

$$\varepsilon(x, r, \varphi) = K(x) \cdot r \sin[\varphi - \beta(x)] \quad (6)$$

ansetzen. Hierin sind  $K$  und  $\beta$  von  $r$  und  $\varphi$  unabhängige Werte, die Achsen  $y$  und  $z$  in Abb. 3 sind raumfest. Bei stationärer Bewegung des Stabes müssen für jeden Querschnitt die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein. Um sie zu formulieren ermitteln wir zunächst die Spannung  $\sigma$  als Funktion der unabhängigen Variablen  $r, \varphi, x$ . Aus (6) ergibt sich für die Maximaldehnung eines Volumselementes im Abstand  $r$  von der Stabachse

$$\varepsilon_{\max}(x, r) = K(x) \cdot r. \quad (7)$$

Aus (1) und (2) folgt (vgl. Abb. 2)

$$\varepsilon_{\max} + \varepsilon_0 = \sigma_{\max}^* \cdot [1 + \kappa (\sigma_{\max}^*)^\alpha]. \quad (8)$$

$$\varepsilon_{\max} - \varepsilon_0 = \sigma_{\max}^*. \quad (9)$$

Aus (8) und (9) erhält man

$$\varepsilon_0 = \frac{\kappa}{2} (\sigma_{\max}^*)^{\alpha+1} \quad (10)$$

$$\varepsilon_{\max} = \sigma_{\max}^* \left[ 1 + \frac{\kappa}{2} (\sigma_{\max}^*)^\alpha \right]. \quad (11)$$

Wir betrachten nun den Spannungs-Dehnungs-Zyklus, den ein körperfestes Volumselement im Abstand  $r$  von der Stabachse durchläuft. Den durch die Punkte A, B, C, D in Abb. 2 dargestellten Spannungs-Dehnungs-Zuständen mögen die Winkellagen



$\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C, \varphi_D$  des betrachteten Volumselementes entsprechen. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Drehung in dem in Abb. 1 angegebenen Sinn erfolgt. Aus (6) erhält man für die Punkte  $A$  bis  $D$  die Beziehungen:

$$-\varepsilon_0 = Kr \sin(\varphi_A - \beta) \quad (12)$$

$$\varepsilon_{\max} = Kr \sin(\varphi_B - \beta) \quad (13)$$

$$\varepsilon_0 = Kr \sin(\varphi_C - \beta) \quad (14)$$

$$-\varepsilon_{\max} = Kr \sin(\varphi_D - \beta). \quad (15)$$

Mit (10) und (11) wird aus (12) bis (15)

$$-\frac{\pi}{2} (\sigma_{\max}^*)^{\alpha+1} = Kr \sin(\varphi_A - \beta) \quad (16)$$

$$\sigma_{\max}^* \left[ 1 + \frac{\pi}{2} (\sigma_{\max}^*)^\alpha \right] = Kr \sin(\varphi_B - \beta) \quad (17)$$

$$\frac{\pi}{2} (\sigma_{\max}^*)^{\alpha+1} = Kr \sin(\varphi_C - \beta) \quad (18)$$

$$-\sigma_{\max}^* \left[ 1 + \frac{\pi}{2} (\sigma_{\max}^*)^\alpha \right] = Kr \sin(\varphi_D - \beta). \quad (19)$$

Für einen Werkstoff mit reversibler Spannungs-Dehnungs-Beziehung wäre  $\varphi_A = 0$  und  $\beta = 0$ . Es wird daher nun vorausgesetzt, daß die Hystereseschleife des betrachteten Werkstoffes genügend schlank ist, so daß  $\varphi_A$  und  $\beta$  als „kleine Winkel“ angesehen werden können. Unter dieser Voraussetzung erhält man aus (12) und (10) in erster Näherung

$$\varphi_A = \beta - \frac{\frac{\pi}{2} (\sigma_{\max}^*)^{\alpha+1}}{Kr}, \quad (20)$$

aus (7) und (13)

$$\sin(\varphi_B - \beta) = 1$$

und daher

$$\varphi_B = \frac{\pi}{2} + \beta. \quad (21)$$

Aus (14) und (12) erkennt man

$$\varphi_C = \varphi_A + \pi, \quad (22)$$

schließlich aus (15) und (7)

$$\sin(\varphi_D - \beta) = -1$$

und somit

$$\varphi_D = \frac{3\pi}{2} + \beta. \quad (23)$$

Nun werde noch vorausgesetzt, daß die Abweichungen der Spannungs-Dehnungs-Beziehung vom Hookeschen Gesetz klein genug sind, so daß in (11)

$$\frac{\pi}{2} (\sigma_{\max}^*)^\alpha \ll 1 \quad (24)$$

und daher auch

$$\frac{\kappa}{2} (Kr)^\alpha \ll 1. \quad (25)$$

Unter dieser Voraussetzung ergibt sich aus (11) mit (7) in erster Näherung

$$\sigma_{\max}^* = Kr \left[ 1 - \frac{\kappa}{2} (Kr)^\alpha \right] \quad (26)$$

Aus (20) und (26) folgt bei Beachtung von (24)

$$\varphi_A = \beta - \frac{\kappa}{2} (Kr)^\alpha \quad (27)$$

und aus (22) mit (27)

$$\varphi_C = \pi + \beta - \frac{\kappa}{2} (Kr)^\alpha \quad (28)$$

(12), (27) und (25) ergeben

$$\varepsilon_0 = \frac{\kappa}{2} (Kr)^{\alpha+1}. \quad (29)$$

Wegen  $\beta \ll 1$  läßt sich statt (6) schreiben

$$\varepsilon = Kr (\sin \varphi - \beta \cos \varphi). \quad (30)$$

Aus (1) und (24) folgt für den Bereich A bis B

$$\sigma^* = (\varepsilon + \varepsilon_0) (1 - \kappa |\varepsilon + \varepsilon_0|^\alpha). \quad (31)$$

Ebenso aus (3) und (24) für den Bereich C bis D

$$\sigma^* = (\varepsilon - \varepsilon_0) (1 - \kappa |\varepsilon - \varepsilon_0|^\alpha). \quad (32)$$

Mit (29) und (30) erhält man aus (31) und (32) für den Bereich A bis B

$$\sigma^* = Kr \left[ \sin \varphi - \beta \cos \varphi + \frac{\kappa}{2} (Kr)^\alpha \right] \left\{ 1 - \kappa \left| Kr \left[ \sin \varphi - \beta \cos \varphi + \frac{\kappa}{2} (Kr)^\alpha \right] \right|^\alpha \right\} \quad (33)$$

und für den Bereich C bis D

$$\sigma^* = Kr \left[ \sin \varphi - \beta \cos \varphi - \frac{\kappa}{2} (Kr)^\alpha \right] \left\{ 1 - \kappa \left| Kr \left[ \sin \varphi - \beta \cos \varphi - \frac{\kappa}{2} (Kr)^\alpha \right] \right|^\alpha \right\} \quad (34)$$

Die Glieder mit den Koeffizienten  $\beta$  und  $\kappa$  können als klein von erster Ordnung angesehen werden. Bei Vernachlässigung der Glieder höherer Kleinheitsordnung erhält man daher aus (33)

$$\text{Bereich A bis B} \dots \sigma^* = Kr \sin \varphi - \beta Kr \cos \varphi + \kappa (Kr)^{\alpha+1} \left( \frac{1}{2} - \sin \varphi |\sin \varphi|^\alpha \right) \quad (35)$$

Aus (2), (29) und (30):

$$\text{Bereich B bis C} \dots \sigma^* = Kr \sin \varphi - \beta Kr \cos \varphi - \frac{\kappa}{2} (Kr)^{\alpha+1} \quad (36)$$

Aus (34) erhält man in erster Näherung

$$\text{Bereich C bis D} \dots \sigma^* = Kr \sin \varphi - \beta Kr \cos \varphi - \kappa (Kr)^{\alpha+1} \left( \frac{1}{2} + \sin \varphi |\sin \varphi|^\alpha \right) \quad (37)$$

Aus (4) mit (29) und (30)

$$\text{Bereich D bis A} \dots \sigma^* = Kr \sin \varphi - \beta Kr \cos \varphi + \frac{\kappa}{2} (Kr)^{\alpha+1} \quad (38)$$

Da bei vertikaler Belastung des Probestabes der Vektor des Biegemomentes  $M(x)$  in die Richtung der  $y$ -Achse fällt, gelten folgende Gleichgewichtsbedingungen für einen Querschnitt im Abstand  $x$  vom freien Ende:

$$\int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} z \sigma^*(x, r, \varphi) r d\varphi dr = \frac{M(x)}{E} \quad (39)$$

und

$$\int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} y \sigma^*(x, r, \varphi) r d\varphi dr = 0. \quad (40)$$

Mit

$$z = r \sin \varphi, \quad y = r \cos \varphi \quad (41)$$

erhält man durch Einsetzen von (35) bis (38) in (39) und (40) unter Beachtung der Integrationsgrenzen laut (21), (23), (27) und (28)

$$\int_{r=0}^R \int_{\varphi=\beta-\frac{\kappa}{2}(Kr)^\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\beta} \left[ Kr \sin \varphi - \beta Kr \cos \varphi + \kappa (Kr)^{\alpha+1} \left( \frac{1}{2} - \sin \varphi |\sin \varphi|^\alpha \right) \right] \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} r^2 d\varphi dr$$

$$+ \int_{r=0}^R \int_{\varphi=\frac{\pi}{2}+\beta}^{\pi+\beta-\frac{\kappa}{2}(Kr)^\alpha} \left[ Kr \sin \varphi - \beta Kr \cos \varphi - \frac{\kappa}{2} (Kr)^{\alpha+1} \right] \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} r^2 d\varphi dr$$

$$+ \int_{r=0}^R \int_{\varphi=\pi+\beta-\frac{\kappa}{2}(Kr)^\alpha}^{\frac{3\pi}{2}+\beta} \left[ Kr \sin \varphi - \beta Kr \cos \varphi - \kappa (Kr)^{\alpha+1} \left( \frac{1}{2} + \sin \varphi |\sin \varphi|^\alpha \right) \right] \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} r^2 d\varphi dr$$

$$+ \int_{r=0}^R \int_{\varphi=\frac{3\pi}{2}+\beta}^{\beta-\frac{\kappa}{2}(Kr)^\alpha+2\pi} \left[ Kr \sin \varphi - \beta Kr \cos \varphi + \frac{\kappa}{2} (Kr)^{\alpha+1} \right] \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} r^2 d\varphi dr = \begin{cases} \frac{M(x)}{E} \\ 0 \end{cases} \quad (42)$$

$$\quad (43)$$

Bei Vernachlässigung der Glieder höherer Kleinheitsordnung ergibt die Integration

$$\frac{\pi}{4} Kr - \kappa \frac{\frac{\pi}{4}}{\alpha + \frac{3}{4}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+4}{2}\right)} (KR)^{\alpha+1} = \frac{M(x)}{ER^3} \quad (44)$$



bzw.

$$\beta = \frac{8\kappa}{\pi} \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 2)(\alpha + 4)} (KR)^\alpha. \quad (45)$$

Hierbei wurde die Beziehung

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi d\varphi = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \quad n > -1 \quad (46)$$

verwendet.

Aus (44) erhält man bei Vernachlässigung der Glieder höherer Kleinheitsordnung

$$K = \frac{4M(x)}{\pi ER^4} \left[ 1 + \kappa \frac{4}{\sqrt{\pi}(\alpha + 4)} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha + 3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha + 4}{2}\right)} \left(\frac{4M(x)}{\pi ER^3}\right)^\alpha \right] \quad (47)$$

und damit aus (45)

$$\beta = \kappa \frac{8}{\pi} \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 2)(\alpha + 4)} \left(\frac{4M(x)}{\pi ER^3}\right)^\alpha. \quad (48)$$

Hierbei wird  $M(x) > 0$  vorausgesetzt.

Durch (30) mit (47) und (48) ist die Dehnung als Funktion der raumfesten Ortskoordinaten  $x, r, \varphi$  in Abhängigkeit von  $\alpha, \kappa$  und  $M(x)$  ausgedrückt. Daraus läßt sich die Form der Stabachse in folgender Weise ermitteln: bei Verwendung von (6) erhält man für die Krümmung der Stabachse

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\varepsilon_{\max}(x, R)}{R} = K(x). \quad (49)$$

Für die geometrische Torsion der Stabachse gilt

$$\frac{1}{\tau} = \frac{d\beta}{ds} \approx \frac{d\beta}{dx}. \quad (50)$$

Bezeichnet man mit  $\xi, \eta, \zeta$  die Koordinaten eines Punktes der Stabachse nach der Verformung, so gilt<sup>4</sup>

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\left(\frac{d^2\xi}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\eta}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right)^2} \quad (51)$$

und

$$\frac{1}{\tau} = \varrho^2 \begin{vmatrix} \frac{d\xi}{ds} & \frac{d\eta}{ds} & \frac{d\zeta}{ds} \\ \frac{d^2\xi}{ds^2} & \frac{d^2\eta}{ds^2} & \frac{d^2\zeta}{ds^2} \\ \frac{d^3\xi}{ds^3} & \frac{d^3\eta}{ds^3} & \frac{d^3\zeta}{ds^3} \end{vmatrix}. \quad (52)$$

Im Rahmen der hier verwendeten Näherung ist

$$\frac{d\xi}{ds} = 1, \quad \frac{d^2\xi}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^3\xi}{ds^3} = 0 \quad (53)$$

<sup>4</sup> z. B. M. Lagally: Vektor-Rechnung, S. 64 (1934), Akad. Verl. Ges. Leipzig

Setzt man

$$\frac{d^2 \zeta}{dx^2} = V(x) \quad (54)$$

und

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = H(x) \quad (55)$$

dann folgt aus (51) mit (53) und (49) im Rahmen der Näherung  $ds = dx$ .

$$V^2 + H^2 = K^2 \quad (56)$$

und aus (52) mit (50) und (53)

$$H \frac{dV}{dx} - V \frac{dH}{dx} = \frac{d\beta}{dx} \quad (57)$$

Aus (56) und (57) gewinnt man

$$\frac{d \left( \frac{H}{V} \right)}{1 + \left( \frac{H}{V} \right)^2} = -d\beta$$

und daraus durch Integration

$$\frac{H}{V} = -\operatorname{tg}(\beta + D).$$

Die Integrationskonstante  $D$  muß jedoch verschwinden, da für  $\beta = 0$  stets  $H = 0$  sein muß. Es ist also

$$H = -V \operatorname{tg} \beta. \quad (58)$$

Bei Beachtung von (56), (54) und (55) wird

$$V = \frac{d^2 \zeta}{dx^2} = -K \cos \beta \quad (59)$$

und

$$H = \frac{d^2 \eta}{dx^2} = K \sin \beta \quad (60)$$

Bei Belastung des Probestabes gemäß Abb. 1 und Vernachlässigung des Eigengewichtes ist

$$M(x) = Px \quad (61)$$

Somit ergibt (59) mit (47), (48) und  $\cos \beta \approx 1$

$$\frac{d^2 \zeta}{dx^2} = K = -\frac{4Px}{\pi ER^4} \left[ 1 + \alpha \frac{4}{V\pi} \frac{l' \left( \frac{\alpha+3}{2} \right)}{(\alpha+4) l' \left( \frac{\alpha+4}{2} \right)} \left( \frac{4Px}{\pi ER^4} \right)^\alpha \right]. \quad (62)$$

Mit den Randbedingungen

$$\zeta_{x=l} = 0 \text{ und } \left( \frac{d\zeta}{dx} \right)_{x=l} = 0 \quad (63)$$

liefert die Integration von (62)

$$\zeta(x) = -\frac{4P}{\pi E R^4} \left\{ \frac{l^3}{2} (l-x) - \frac{1}{6} (l^3 - x^3) + \kappa \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)}{(\alpha+2)(\alpha+4)\Gamma\left(\frac{\alpha+4}{2}\right)} \left( \frac{4P}{\pi E R^3} \right)^\alpha \cdot \left[ (l-x) l^{\alpha+2} - \frac{l^{\alpha+3} - x^{\alpha+3}}{\alpha+3} \right] \right\} \quad (64)$$

Daraus erhält man die Vertikalverschiebung am freien Ende zu

$$\zeta_{x=0} = -\frac{4Pl^3}{3\pi E R^4} \left[ 1 + \kappa \frac{12}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)}{(\alpha+3)(\alpha+4)\Gamma\left(\frac{\alpha+4}{2}\right)} \left( \frac{4Pl}{\pi E R^3} \right)^\alpha \right]. \quad (65)$$

Die zusätzliche Vertikalauslenkung  $(\Delta\zeta)_{x=0}$  zufolge der Hysterese ist demnach

$$(\Delta\zeta)_{x=0} = -\kappa \frac{4l^3}{\sqrt{\pi} R} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)}{(\alpha+3)(\alpha+4)\Gamma\left(\frac{\alpha+4}{2}\right)} \left( \frac{4Pl}{\pi E R^3} \right)^{\alpha+1}. \quad (66)$$

Für  $\beta \ll 1$  liefert (60) mit (47) und (48) bis auf Glieder höherer Kleinheitsordnung

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = K \beta = \kappa \frac{8}{\pi R} \frac{\alpha+1}{(\alpha+2)(\alpha+4)} \left( \frac{4Px}{\pi E R^3} \right)^{\alpha+1}. \quad (67)$$

Mit den Randbedingungen

$$\eta_{x=l} = 0 \text{ und } \left( \frac{d\eta}{dx} \right)_{x=l} = 0 \quad (68)$$

ergibt die Integration von (67)

$$\eta(x) = \kappa \frac{8}{\pi R} \frac{\alpha+1}{(\alpha+2)^2(\alpha+4)} \left[ l^{\alpha+2} (l-x) - \frac{l^{\alpha+3} - x^{\alpha+3}}{\alpha+3} \right] \left( \frac{4P}{\pi E R^3} \right)^{\alpha+1} \quad (69)$$

und daraus die Horizontalauslenkung am freien Ende zu

$$\eta_{x=0} = \kappa \frac{8l^2}{\pi R} \frac{\alpha+1}{(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)} \left( \frac{4Pl}{\pi E R^3} \right)^{\alpha+1}. \quad (70)$$

Erfolgt die Drehung entgegen dem in Abb. 1 angegebenen Drehsinn, dann müßte überall  $\varphi$  durch  $\pi - \varphi$  ersetzt werden, damit der Spannungs-Dehnungszyklus richtig durchlaufen wird. Dies entspricht einer Spiegelung der ganzen Anordnung an der Vertikalebene durch die unverformte Stabachse. Man erkennt daraus, daß die Vertikalverschiebung nach Umkehr des Drehsinnes dieselbe ist, während die Horizontalauslenkung nach der anderen Seite erfolgt. Es erscheint daher meßtechnisch zweckmäßig, die bei Umkehr der Drehrichtung auftretende gesamte Horizontalverschiebung zu messen. Wenn der Werkstoff die vorne vorausgesetzten Eigenschaften besitzt, dann müßten, wie man aus (65) und (70) erkennt, die Ausschläge von  $\omega$  unabhängig sein, sofern nur  $\omega \neq 0$  ist.



Aus (66) und (70) folgt

$$\left| \frac{\eta}{\Delta \zeta} \right|_{x=0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(\alpha + 1) I' \left( \frac{\alpha + 4}{2} \right)}{(\alpha + 2) I' \left( \frac{\alpha + 3}{2} \right)}. \quad (71)$$

Diese Beziehung ist in Abb. 4 dargestellt. Mißt man für eine vorgegebene Belastung  $P$  die Ausschläge  $\eta_{x=0}$  und  $(\Delta \zeta)_{x=0}$ , so kann man aus Abb. 4 den zugehörigen Wert  $\alpha$  ablesen. Damit folgt aus einer der beiden Gleichungen (66) oder (70) der Wert von  $\kappa$ .

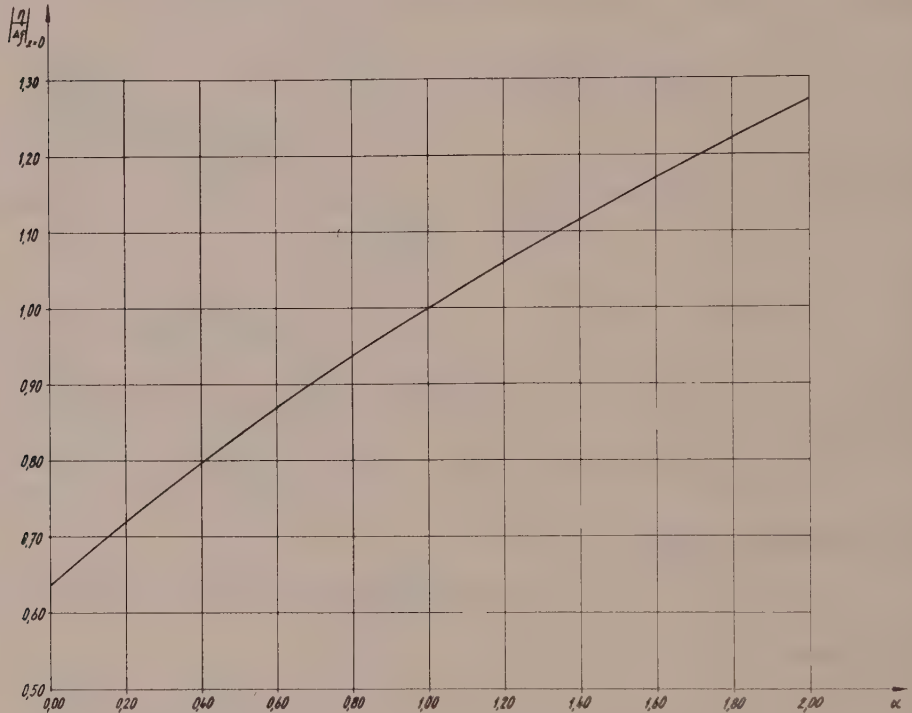


Abb. 4. Diagramm zur Ermittlung von  $\alpha$  aus Gl. (71)

Führt man zur Kontrolle den Versuch für zwei verschiedene Belastungen  $P_1$  und  $P_2$  durch, dann erhält man aus den beiden Horizontalverschiebungen  $(\eta_1)_{x=0}$  und  $(\eta_2)_{x=0}$  nach (70) zwei Gleichungen für die beiden zu bestimmenden Materialkonstanten  $\alpha$  und  $\kappa$ . Es ergibt sich

$$\alpha = \frac{\ln \frac{(\eta_1)_{x=0}}{(\eta_2)_{x=0}}}{\ln \frac{P_1}{P_2}} - 1 \quad (72)$$

und damit für irgendeine Belastung  $P$

$$\kappa = \eta_{x=0} \cdot \frac{\pi R}{8 l^2} \frac{(\alpha + 2)(\alpha + 3)(\alpha + 4)}{\alpha + 1} \left( \frac{\pi E R^3}{4 P l} \right)^{\alpha+1} \quad (73)$$

Es soll nun noch ein Zusammenhang mit der pro Volumseinheit und Umlauf dissipierten Energie  $W$  hergestellt werden. Es ist

$$W = \oint \sigma d\varepsilon = E \oint \sigma^* d\varepsilon. \quad (74)$$

Mit (1) bis (4) liefert (74), (vgl. Abb. 2):

$$\begin{aligned} \frac{W}{E} = W^* = & \int_0^{\sigma_{\max}^*} [1 + \kappa(\alpha + 1) |\sigma^*|^\alpha] \sigma^* d\sigma^* + \int_{\sigma_{\max}^*}^0 \sigma^* d\sigma^* + \\ & + \int_0^{-\sigma_{\max}^*} [1 + \kappa(\alpha + 1) |\sigma^*|^\alpha] \sigma^* d\sigma^* + \int_{-\sigma_{\max}^*}^0 \sigma^* d\sigma^*. \end{aligned}$$

Die Integration ergibt

$$W^* = 2\kappa \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} (\sigma_{\max}^*)^{\alpha+2} \quad (75)$$

Häufig wird diese Beziehung auch in der Form

$$W^* = C^* (\sigma_{\max}^*)^n \quad (76)$$

geschrieben<sup>5</sup>. Es ist dann

$$\alpha = n - 2 \quad \left| \quad n = \alpha + 2 \quad (77) \right.$$

$$\kappa = \frac{C^*}{2} \frac{n}{n-1} \quad \left| \quad C^* = \frac{2(\alpha+1)}{\alpha+2} \kappa. \quad (78) \right.$$

Mit den Materialkonstanten  $C^*$  und  $n$  nehmen (65), (66) und (70) die Form an:

$$\zeta_{x=0} = - \frac{4 Pl^3}{3 \pi E R^4} \left[ 1 + \frac{6 C^*}{\sqrt{\pi}} \frac{n}{(n-1)(n+1)(n+2)} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \left(\frac{4 Pl}{\pi E R^3}\right)^{n-2} \right] \quad (79)$$

$$(\Delta\zeta)_{x=0} = - \frac{2 C^* l^2}{\sqrt{\pi}} \frac{n}{R (n-1)(n+1)(n+2)} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \left(\frac{4 Pl}{\pi E R^3}\right)^{n-1} \quad (80)$$

$$\eta_{x=0} = \frac{4 C^* l^2}{\pi} \frac{1}{R (n+1)(n+2)} \left(\frac{4 Pl}{\pi E R^3}\right)^{n-1}. \quad (81)$$

## II. Kelvin-Körper mit Hysterese

Als weitere Anwendung soll ein Werkstofftypus zugrunde gelegt werden, dessen Modell in Abb. 5 dargestellt ist. Dies entspricht einem Kelvin-Körper<sup>6</sup>, dessen Hookescher Anteil durch einen mit statischer Hysterese behafteten ersetzt wurde.

<sup>5</sup> Siehe Fußnote 3.

<sup>6</sup> Siehe Fußnote 2.

Für den viskosen Anteil gelte

$$\frac{\sigma_V}{E} = \sigma_V^* = \vartheta \dot{\varepsilon} \quad (\vartheta \dots \text{Retardationszeit}). \quad (82)$$

Die auch hier wieder als schlank vorausgesetzte Hystereseschleife soll zur Vereinfachung der Rechnung durch eine flächengleiche Ellipse (Abb. 6) ersetzt werden, bei der die Abszisse des Scheitels mit der Größe  $\varepsilon_{\max}$  der Hystereseschleife übereinstimmen möge. Die Gleichung dieser Ellipse lautet in Parameterdarstellung

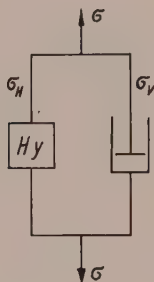


Abb. 5. Modell des im Abschnitt II betrachteten Werkstoffes

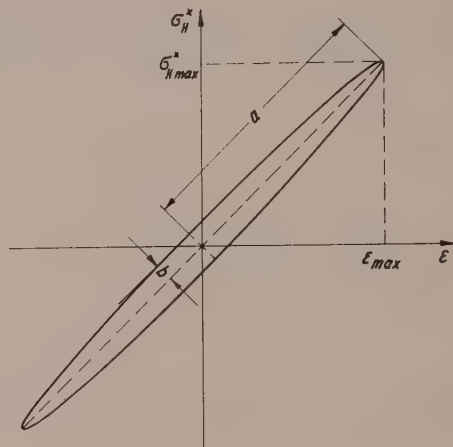


Abb. 6. Ersatz der Hystereseschleife durch eine Ellipse

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2} (a \sin \psi - b \cos \psi). \quad (83)$$

$$\frac{\sigma_H}{E} = \sigma_H^* = \frac{\sqrt{2}}{2} (a \sin \psi + b \cos \psi) \quad (84)$$

Die pro Volumseinheit und Umlauf durch die Hysterese dissipierte Energie  $W_H$  sei wie vorne in der Form

$$W_H = E C^* (\sigma_{H\max}^*)^n \quad (85)$$

angesetzt. Die Fläche  $F$  der Ellipse in Abb. 6 ist

$$F = a b \pi = \frac{W_H}{E}. \quad (86)$$

Laut obiger Voraussetzung ist

$$\frac{b}{a} \ll 1. \quad (87)$$

daher gilt bis auf Glieder höherer Kleinheitsordnung

$$a = \sqrt{2} \sigma_{H\max}^* = \sqrt{2} \varepsilon_{\max}. \quad (88)$$

Aus (85), (86) und (88) folgt

$$b = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} C^* (\sigma_{H\max}^*)^{n-1} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} C^* \varepsilon_{\max}^{n-1}. \quad (89)$$



Unter Zugrundelegung des raumfesten Koordinatensystems  $x, r, \varphi$  wie in Abb. 3 setzen wir wieder

$$\varepsilon(x, r, \varphi) = K(x) \cdot r \sin[\varphi - \beta(x)]. \quad (90)$$

wobei hier wegen des viskosen Anteils  $\beta$  nicht als klein vorausgesetzt wird. Aus dem Vergleich von (90) mit (83) folgt

$$Kr = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{a^2 + b^2} \quad (91)$$

und

$$\psi = \varphi - \beta + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a} \quad (92)$$

Durch Einsetzen von (88), (89), (92) und der aus (90) folgenden Beziehung

$$\varepsilon_{\max}(x, r) = K(x) \cdot r \quad (93)$$

in (84) erhält man

$$\sigma_H^* = Kr \left[ 1 + \frac{C^{*2}}{4\pi^2} (Kr)^{2n-4} \sin \left\{ \varphi - \beta + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{C^*}{2\pi} (Kr)^{n-2} \right] \right\} \right] \quad (94)$$

Aus der Voraussetzung (87) folgt, daß die Glieder mit dem Faktor  $C^*$  klein gegen Eins sind. Die Gesamtspannung

$$\sigma^* = \sigma_V^* + \sigma_H^* \quad (95)$$

ergibt sich aus (82) und (94) bei Vernachlässigung der Glieder höherer Kleinheitsordnung zu

$$\begin{aligned} \sigma^* = Kr \left\{ \sin \varphi \left[ \cos \beta + \left( \vartheta \omega + \frac{C^*}{\pi} (Kr)^{n-2} \right) \sin \beta \right] + \right. \\ \left. + \cos \varphi \left[ -\sin \beta + \left( \vartheta \omega + \frac{C^*}{\pi} (Kr)^{n-2} \right) \cos \beta \right] \right\} \quad (96) \end{aligned}$$

worin  $\omega = \dot{\varphi}$  die Winkelgeschwindigkeit bedeutet.

Mit (96) liefern die Gleichgewichtsbedingungen (39) und (40) mit (41) nach der Integration

$$KR \left\{ \cos \beta + \left[ \vartheta \omega + \frac{4C^*}{\pi(n+2)} (KR)^{n-2} \right] \sin \beta \right\} = \frac{4M(x)}{\pi E R^3} \quad (97)$$

und

$$\operatorname{tg} \beta = \vartheta \omega + \frac{4C^*}{\pi(n+2)} (KR)^{n-2}. \quad (98)$$

Für die Berechnung der Auslenkungen betrachten wir zunächst den Fall

$$\vartheta \omega \gg \frac{4C^*}{\pi(n+2)} (KR)^{n-2}. \quad (99)$$

Damit folgt aus (98) bis auf Glieder höherer Kleinheitsordnung

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \vartheta^2 \omega^2}} \left[ 1 - \frac{4C^*}{\pi(n+2)} \frac{\vartheta \omega}{1 + \vartheta^2 \omega^2} (KR)^{n-2} \right] \quad (100)$$

und

$$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \vartheta^2 \omega^2}} \left[ \vartheta \omega + \frac{4C^*}{\pi(n+2)} \frac{1 - \vartheta^2 \omega^2}{1 + \vartheta^2 \omega^2} (KR)^{n-2} \right]. \quad (101)$$

Mit (100) und (101) erhält man aus (97) in derselben Näherung

$$KR = \frac{4 M(x)}{\pi E R^3} \frac{1}{\sqrt{1 + \vartheta^2 \omega^2}} \left[ 1 - \frac{4 C^*}{\pi (n+2)} \frac{\vartheta \omega}{(1 + \vartheta^2 \omega^2)^{\frac{n}{2}}} \left( \frac{4 M(x)}{\pi E R^3} \right)^{n-2} \right] \quad (102)$$

und durch Einsetzen von (102) in (98), (99) und (100)

$$\operatorname{tg} \beta = \vartheta \omega + \frac{4 C^*}{\pi (n+2)} \frac{1}{(1 + \vartheta^2 \omega^2)^{\frac{n}{2}-1}} \left( \frac{4 M(x)}{\pi E R^3} \right)^{n-2} \quad (103)$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \vartheta^2 \omega^2}} \left[ 1 - \frac{4 C^*}{\pi (n+2)} \frac{\vartheta \omega}{(1 + \vartheta^2 \omega^2)^{\frac{n}{2}}} \left( \frac{4 M(x)}{\pi E R^3} \right)^{n-2} \right] \quad (104)$$

$$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \vartheta^2 \omega^2}} \left[ \vartheta \omega + \frac{4 C^*}{\pi (n+2)} \frac{1}{(1 + \vartheta^2 \omega^2)^{\frac{n}{2}}} \left( \frac{4 M(x)}{\pi E R^3} \right)^{n-2} \right]. \quad (105)$$

Um die Form der Stabachse zu finden, setzt man (102), (104) und (105) in (59) und (60) ein. Man erhält

$$\frac{d^2 \zeta}{dx^2} = - \frac{4 M(x)}{\pi E R^4} \frac{1}{1 + \vartheta^2 \omega^2} \left[ 1 - \frac{8 C^*}{\pi (n+2)} \frac{\vartheta \omega}{(1 + \vartheta^2 \omega^2)^{\frac{n}{2}}} \left( \frac{4 M(x)}{\pi E R^3} \right)^{n-2} \right] \quad (106)$$

und

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{4 M(x)}{\pi E R^4} \frac{1}{1 + \vartheta^2 \omega^2} \left[ \vartheta \omega + \frac{4 C^*}{\pi (n+2)} \frac{1 - \vartheta^2 \omega^2}{(1 + \vartheta^2 \omega^2)^{\frac{n}{2}}} \left( \frac{4 M(x)}{\pi E R^3} \right)^{n-2} \right]. \quad (107)$$

Mit

$$M = P x$$

und den Randbedingungen (63) bzw. (68) liefert die Integration von (106) bzw. (107) die Auslenkungen am freien Ende:

$$\zeta_{x=0} = - \frac{4 P l^3}{3 \pi E R^4} \frac{1}{1 + \vartheta^2 \omega^2} \left[ 1 - \frac{24 C^*}{\pi (n+1)(n+2)} \frac{\vartheta \omega}{(1 + \vartheta^2 \omega^2)^{\frac{n}{2}}} \left( \frac{4 P l}{\pi E R^3} \right)^{n-2} \right] \quad (108)$$

und

$$\eta_{x=0} = \frac{4 P l^3}{3 \pi E R^4} \frac{1}{1 + \vartheta^2 \omega^2} \left[ \vartheta \omega + \frac{12 C^*}{\pi (n+1)(n+2)} \frac{1 - \vartheta^2 \omega^2}{(1 + \vartheta^2 \omega^2)^{\frac{n}{2}}} \left( \frac{4 P l}{\pi E R^3} \right)^{n-2} \right] \quad (109)$$

Sind die beiden Terme der Ungleichung (99) klein gegen Eins, so braucht diese Ungleichung nicht erfüllt zu sein. Es muß daher dieser Fall noch getrennt untersucht werden. Es ist dann wie aus (98) ersichtlich,  $\beta \ll 1$  und kann man statt (98) schreiben

$$\beta \approx \sin \beta \approx \vartheta \omega + \frac{4 C^*}{\pi (n+2)} (KR)^{n-2} \quad (110)$$

und

$$\cos \beta \approx 1. \quad (111)$$

Es gehen jedoch die Gleichungen (100) und (101) in (110) und (111) über, wenn man  $\vartheta \omega \ll 1$  voraussetzt. Die gewonnenen Ergebnisse (108) und (109) gelten also auch

für beliebig kleine Werte von  $\vartheta\omega$ , die Voraussetzung (99) erweist sich nunmehr als nicht notwendig. Für den Fall  $\vartheta\omega \ll 1$  erhält man aus (100) und (101) die Näherungen

$$\xi_{x=0} = -\frac{4 Pl^3}{3 \pi E R^4} \quad (112)$$

und

$$\eta_{x=0} = \frac{4 Pl^3}{3 \pi E R^4} \left[ \vartheta\omega + \frac{12 C^*}{\pi (n+1)(n+2)} \left( \frac{4 Pl}{\pi E R^3} \right)^{n-2} \right] \quad (113)$$

Bei fehlendem viskosen Anteil ( $\vartheta = 0$ ) müßten sich aus (112) und (113) die Ausschläge bei reiner Hysterese ergeben. Der Vergleich von (112) und (113) mit (79) und (81) zeigt, daß zwar die Horizontalverschiebung übereinstimmt, aber für die Vertikalverschiebung durch (112) nur das Hauptglied von (79) wiedergegeben wird. Dies rührt daher, daß die Hystereseschleife durch eine Ellipse gleicher Fläche ersetzt wurde. Da die Horizontalverschiebung offenbar nur von der dissipierten Energie (Fläche der Schleife) abhängt, stimmen (113) und (81) für  $\vartheta = 0$  überein.

Zur Bestimmung der Materialkonstanten  $C^*$ ,  $n$ ,  $\vartheta$  darf also hier von den beiden Gleichungen (108) und (109) nur die letztere verwendet werden. Betrachtet man die Abhängigkeit des Horizontalausschlages von der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  nach Gleichung (109), so erkennt man, daß dieser, bei sehr kleinem  $\omega$  vom Wert wie in (81) ausgehend, mit wachsendem  $\omega$  zunächst zunimmt und nach Überschreiten eines Maximums mit unbegrenzt wachsendem  $\omega$  gegen Null geht. Um die Materialkonstanten  $C^*$ ,  $n$  und  $\vartheta$  zu ermitteln, kann man also zunächst den Versuch mit sehr kleiner Drehzahl ausführen. Man erhält dann  $C^*$  und  $n$  bzw.  $\alpha$  und  $\varkappa$  wie im ersten Abschnitt. Mit den nunmehr bekannten Werten  $C^*$  und  $n$  kann aus (109) für jede beliebige Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  nach Messung des zugehörigen Horizontalausschlages  $\eta_{x=0}$  der Wert  $\vartheta$  ermittelt werden. Dies kann beispielsweise mittels eines geeigneten Nomo-gramms geschehen. Dazu setzt man

$$\frac{3 \pi E R^4}{4 Pl^3} \eta_{x=0} = X \quad (114)$$

$$\frac{12 C^*}{\pi (n+1)(n+2)} \left( \frac{4 Pl}{\pi E R^3} \right)^{n-2} = Y \quad (115)$$

und

$$\vartheta\omega = p. \quad (116)$$

Damit schreibt sich (113)

$$X = \frac{p}{1+p^2} + \frac{1-p^2}{(1+p^2)^{\frac{n}{2}+1}} Y. \quad (117)$$

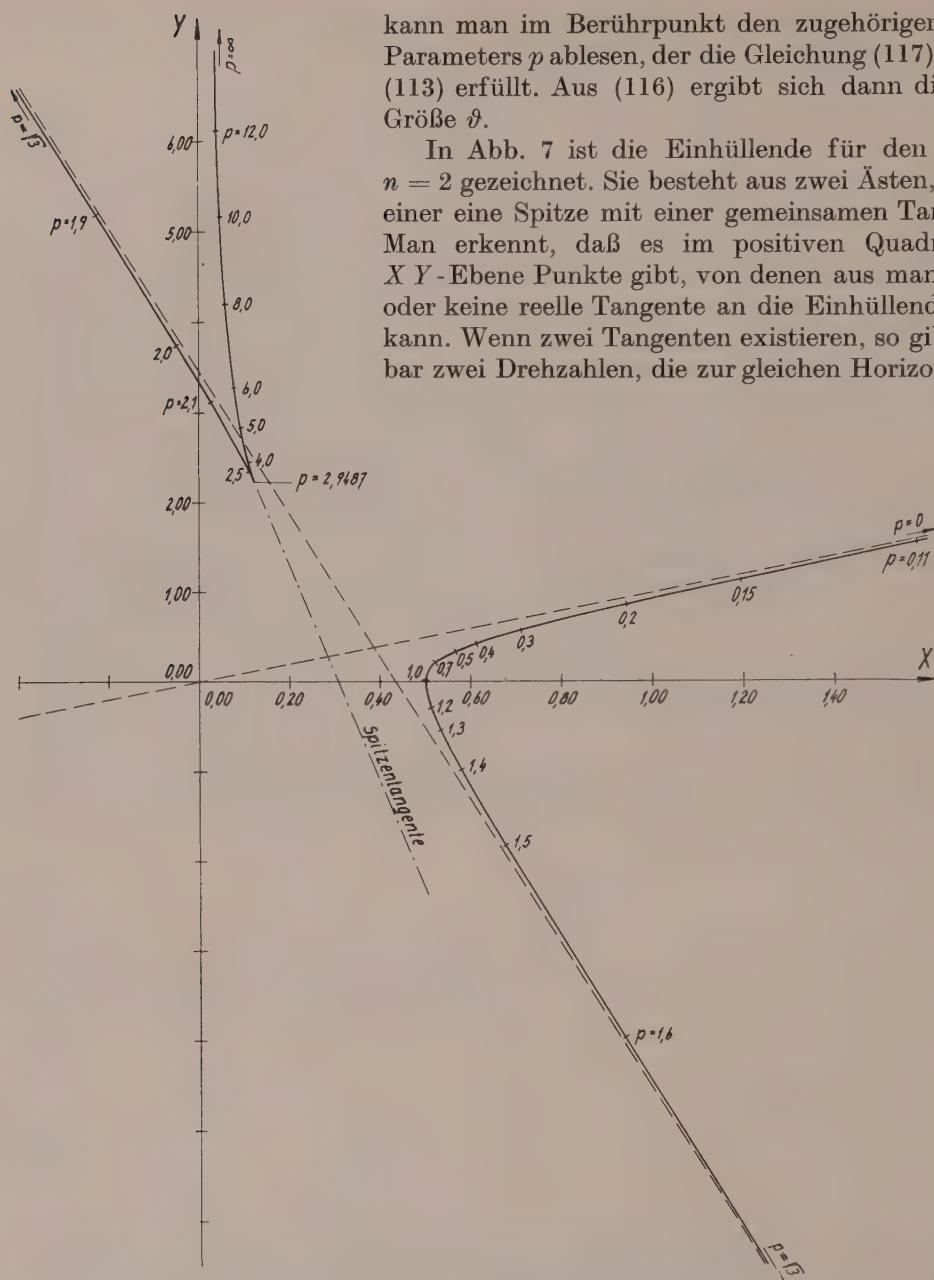
Für vorgegebenes  $n$  ist dies die Gleichung einer einparametrischen Geradenschar in der  $XY$ -Ebene. Ihre Einhüllende hat folgende Parameterdarstellung:

$$X = \frac{p}{1+p^2} + \frac{(1-p^2)^2}{p(1+p^2)[4+n(1-p^2)]} \quad (118)$$

$$Y = \frac{(1-p^2)(1+p^2)^{n/2}}{p[4+n(1-p^2)]}. \quad (119)$$

Man kann diese Kurve in der  $XY$ -Ebene zeichnen und auf ihr die Parameterwerte  $p$  eintragen. Zieht man nun von dem Punkt  $X, Y$  aus, der sich durch die Messung von  $C^*$  und  $n$  mittels (114) und (115) bestimmt, die Tangente an diese Einhüllende, so



Abb. 7. Nomogramm zur Ermittlung von  $\vartheta$  aus Gl. (109) für  $n = 2$ 

kung führen. Dabei müßte sich aus beiden  $p$ -Werten dieselbe Retardationszeit ergeben. Fällt der Berührungspunkt in den Bereich sehr kleiner Parameterwerte, dann ist es zweckmäßiger,  $\vartheta$  aus der linearen Näherung nach Gleichung (113) direkt zu berechnen.

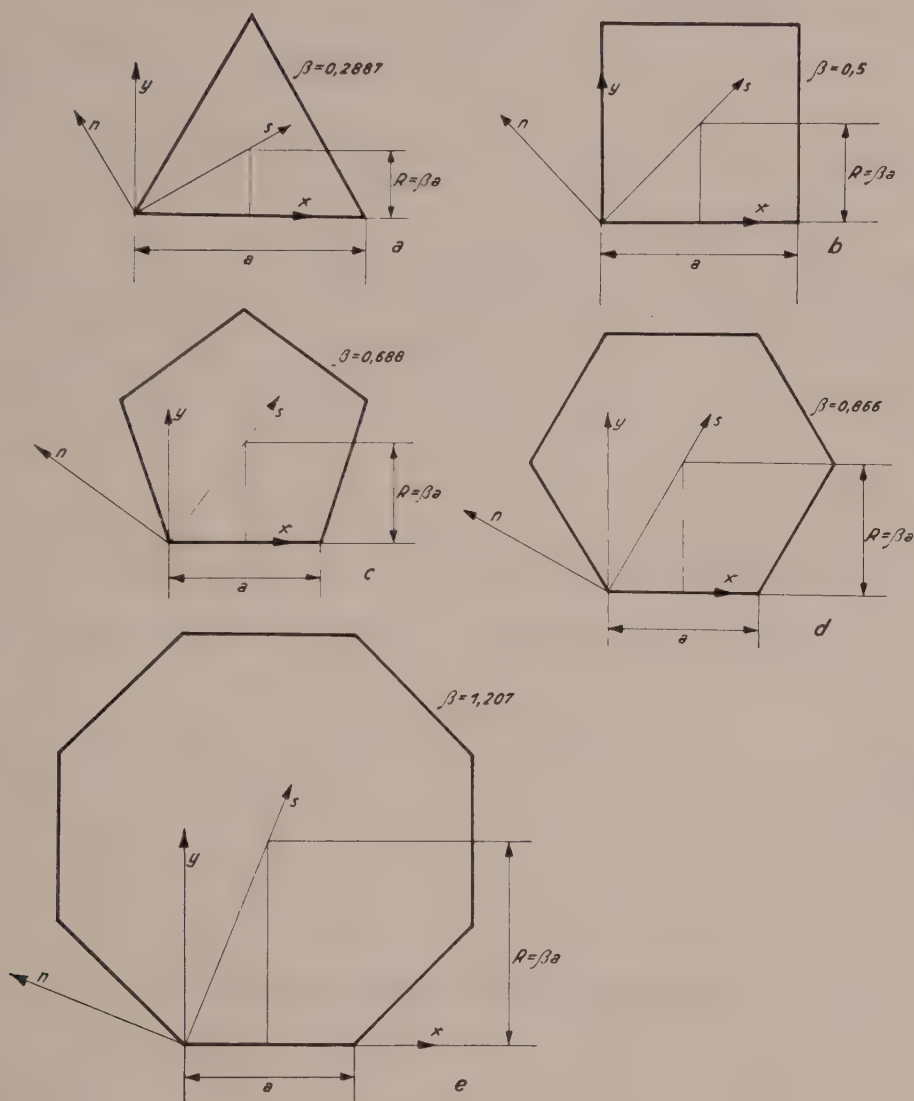
(Eingegangen am 21. September 1960)

# Stabilität und Eigenschwingungen einer Platte von der Form eines regelmäßigen Polygons

Von Zbigniew Kaczkowski, Warszawa

Mit 2 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Das Eigenwertproblem der isotropen, elastisch gebetteten Platte mit polygonalem Umriß wird behandelt.



Den Gegenstand unserer Untersuchungen wird eine isotrope Platte von der Dicke  $h$  und der Form eines beliebigen regelmäßigen  $n$ -Ecks bilden (Abb. 1). Die Platte ist auf einer elastischen Unterlage vom Winklerschen Typ mit der Bettungsziffer  $K$  gelagert, während sie auf ihrer Peripherie beliebige kontinuierliche Randbedingungen erfüllt. Wir

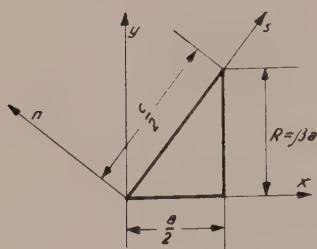
werden uns hier lediglich mit einer auf ihrem Rande freigelagerten Platte sowie mit einer eingespannten Platte eingehender befassen.

Die Belastung der Platte bilden gleichmäßig auf der ganzen Peripherie verteilte, von der Zeit unabhängige Druckkräfte  $N$  und senkrecht zur Plattenebene gerichtete d'Alembertsche Beharrungskräfte. Wir betrachten die stationären Schwingungen der Platte mit der Kreisfrequenz  $\omega$ .

Außerdem gelten die klassischen Voraussetzungen der Theorie dünner, ideal elastischer Platten.

Mit den obenerwähnten Voraussetzungen hat die Differentialgleichung der Amplitude  $w$  der freien Schwingungen der Platte die bekannte Form:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + N \nabla^2 w - (\mu \omega^2 - K) w = 0, \quad (1)$$



wo  $D = E h^3 / 12 (1 - \nu^2)$  die Plattenbiegesteifigkeit und  $\mu$  die Plattenmasse bezeichnet, die auf die Einheit ihrer Oberfläche entfällt, und  $\nabla^2 w = \partial^2 w / \partial x^2 + \partial^2 w / \partial y^2$  gilt.

Wir nehmen an, daß die Gestalt der Schwingungen zu allen Symmetrieachsen der Platte, die sowohl durch die Scheitelpunkte, als auch durch die Mitte der Polygonseiten hindurchgehen, symmetrisch ist. Es genügt dann die Untersuchung des dreieckigen Plattenteils, der von zwei einander benachbarten Symmetrieachsen und dem Plattenrand begrenzt ist (Abb. 2).

Die einfache Reihe

$$w = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} Y_m(\eta) \sin m \pi \xi \quad (\xi = x/a, \quad \eta = y/a) \quad (2)$$

erfüllt die Gleichung (1), wenn die Funktion  $Y_m(\eta)$  der nachstehenden gewöhnlichen Differenzialgleichung genügt,

$$\frac{d^4 Y_m}{d \eta^4} - 2 \gamma_m \frac{d^2 Y_m}{d \eta^2} + \delta_m^2 Y_m = 0, \quad (3)$$

in welcher

$$\gamma_m = (m \pi)^2 \left( 1 - \frac{A}{m^2} \right), \quad \delta_m^2 = (m \pi)^4 \left( 1 - 2 \frac{A}{m^2} - \frac{\Omega}{m^4} \right), \quad (4)$$

$$A = \frac{N a^2}{2 \pi^2 D}, \quad \Omega = \frac{\mu \omega^2 - K}{\pi^4 D} a^4. \quad (5)$$

Die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (3):

$$r^4 - 2 \gamma_m r^2 + \delta_m^2 = 0$$

hat folgende Wurzeln:

$$r_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\gamma_m \pm \sqrt{\gamma_m^2 - \delta_m^2}}$$

Wenn wir die Abhängigkeiten (4) einsetzen, erhalten wir sie in anderer Form:

$$r_{1,2} = \pm m \pi \varphi_m, \quad r_{3,4} = \pm m \pi \psi_m, \quad (6)$$



wo:

$$\varphi_m = \sqrt{1 - \frac{\Phi}{m^2}}, \quad \psi_m = \sqrt{1 - \frac{\Psi}{m^2}}, \quad (7)$$

$$\Phi = \Lambda - \sqrt{\Lambda^2 + \Omega}, \quad \Psi = \Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \Omega}. \quad (8)$$

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1), das die entsprechenden Randbedingungen auf der Geraden  $x = a/2$  erfüllt, hat somit nachstehende Form:

$$w = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (A_m ch m \lambda \varphi_m \eta + B_m sh m \pi \varphi_m \eta + C_m ch m \pi \psi_m \eta + D_m sh m \pi \psi_m \eta) \sin m \pi \xi. \quad (9)$$

Für die weiteren Untersuchungen wird auch die Funktion  $\nabla^2 w$  benötigt. Es ist leicht festzustellen, daß sie nachstehende Form hat:

$$\nabla^2 w = -\frac{\pi^2}{a^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} [\Phi (A_m ch m \pi \varphi_m \eta + B_m sh m \pi \varphi_m \eta) + \Psi (C_m ch m \pi \psi_m \eta + D_m sh m \pi \psi_m \eta)] \sin m \pi \xi. \quad (10)$$

Von den vier Integrationskonstanten können zwei aus den Randbedingungen auf der Kante  $y = 0$  berechnet werden. So wird im Fall der auf der Peripherie freigelagerten Platte Folgendes gelten,

$$A_m = C_m = 0, \quad (11)$$

während wir im Fall der eingespannten Platte erhalten,

$$C_m = -A_m, \quad D_m = -\frac{\varphi_m}{\psi_m} B_m. \quad (12)$$

Um die Randbedingungen auf der Geraden  $y = 2\beta x$  zu formulieren, führen wir ein neues Koordinatensystem  $s, n$  ein, das mit den Koordinaten  $x, y$  wie folgt verbunden ist:

$$\left. \begin{aligned} x &= s \frac{a}{c} - n \frac{2\beta a}{c}, & y &= s \frac{2\beta a}{c} + n \frac{a}{c}, \\ \xi &= \sigma - 2\beta \zeta, & \eta &= 2\beta \sigma + \zeta, & \sigma &= s/c, & \zeta &= n/c. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Nach Einsetzen der Abhängigkeiten (13) in die Funktion (9) und (10) erhalten wir ohne Mühe die Randbedingungen auf der Geraden  $y = 2\beta x$  in folgender Weise:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial w}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} &= \pi \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} m \{ [\varphi_m (A_m sh 2m \pi \varphi_m \beta \sigma + B_m ch 2m \pi \varphi_m \beta \sigma) + \\ &+ \psi_m (C_m sh 2m \pi \psi_m \beta \sigma + D_m ch 2m \pi \psi_m \beta \sigma)] \sin m \pi \sigma - \\ &- 2\beta (A_m ch 2m \pi \varphi_m \beta \sigma + B_m sh 2m \pi \varphi_m \beta \sigma + \\ &+ C_m ch 2m \pi \psi_m \beta \sigma + D_m sh 2m \pi \psi_m \beta \sigma) \cos m \pi \sigma \} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} &= -\frac{\pi^3}{a^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} m \{ [\Phi \varphi_m (A_m sh 2m \pi \varphi_m \beta \sigma + B_m ch 2m \pi \varphi_m \beta \sigma) + \\ &+ \Psi \psi_m (C_m sh 2m \pi \psi_m \beta \sigma + D_m ch 2m \pi \psi_m \beta \sigma)] \sin m \pi \sigma - \\ &- 2\beta [\Phi (A_m ch 2m \pi \varphi_m \beta \sigma + B_m sh 2m \pi \varphi_m \beta \sigma) + \\ &+ \Psi (C_m ch 2m \pi \psi_m \beta \sigma + D_m sh 2m \pi \psi_m \beta \sigma)] \cos m \pi \sigma \} = 0. \end{aligned}$$

Nach dem Ordnen und der Einführung der Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} f_m^{\kappa}(\sigma) &= m (\kappa_m \operatorname{sh} 2 m \pi \kappa_m \beta \sigma \sin m \pi \sigma - 2 \beta \operatorname{ch} 2 m \pi \kappa_m \beta \sigma \cos m \pi \sigma), \\ g_m^{\kappa}(\sigma) &= m (\kappa_m \operatorname{ch} 2 m \pi \kappa_m \beta \sigma \sin m \pi \sigma - 2 \beta \operatorname{sh} 2 m \pi \kappa_m \beta \sigma \cos m \pi \sigma), \\ \kappa &= \varphi, \psi, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

schreiben wir die obigen Bedingungen wie folgt an:

$$\left. \begin{aligned} \sum_m [A_m f_m^{\varphi}(\sigma) + B_m g_m^{\varphi}(\sigma)] + \sum_m [C_m f_m^{\psi}(\sigma) + D_m g_m^{\psi}(\sigma)] &= 0, \\ \Phi \sum_m [A_m f_m^{\varphi}(\sigma) + B_m g_m^{\varphi}(\sigma)] + \Psi \sum_m [C_m f_m^{\psi}(\sigma) + D_m g_m^{\psi}(\sigma)] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots).$$

Da nach Voraussetzung:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \Phi & \Psi \end{vmatrix} = \Psi - \Phi = 2 \sqrt{\Lambda^2 + \Omega} \neq 0,$$

so kann das System (15) durch folgendes System ersetzt werden:

$$\begin{aligned} \sum_m [A_m f_m^{\varphi}(\sigma) + B_m g_m^{\varphi}(\sigma)] &= 0, \\ \sum_m [C_m f_m^{\psi}(\sigma) + D_m g_m^{\psi}(\sigma)] &= 0. \end{aligned} \quad (m = 1, 3, 5, \dots) \quad (16)$$

Die Funktionen (14) entwickeln wir jetzt in Fouriersche Reihen vom Typ

$$\sum_{r=1,3,5,\dots}^{\infty} a_r \sin r \pi \sigma:$$

$$\begin{aligned} f_m^{\kappa}(\sigma) &= \frac{\beta}{\pi} \sum_{r=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[ (m r + \Theta) \frac{(-1)^j \operatorname{ch} m \pi \kappa_m \beta - 1}{(m^2 - \Theta) \beta^2 + j^2} + \right. \\ &\quad \left. + (m r - \Theta) \frac{(-1)^k \operatorname{ch} m \pi \kappa_m \beta - 1}{(m^2 - \Theta) \beta^2 + k^2} \right] \sin r \pi \sigma, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} g_m^{\kappa}(\sigma) &= \frac{\beta}{\pi} \operatorname{sh} m \pi \kappa_m \beta \sum_{r=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[ \frac{(m r + \Theta) (-1)^j}{(m^2 - \Theta) \beta^2 + j^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(m r - \Theta) (-1)^k}{(m^2 - \Theta) \beta^2 + k^2} \right] \sin r \pi \sigma. \end{aligned} \quad (18)$$

Hierbei kamen folgende Bezeichnungen zur Anwendung:

$$j, k = \frac{m \pm r}{2}, \quad \Theta = \Phi, \Psi, \quad \kappa = \varphi, \psi.$$

Die Funktionen  $\sin r \pi \sigma$  bilden, wie bekannt, für die ungeraden Werte  $r$  im Abschnitt  $0 < \sigma < 1/2$  ein vollständiges System orthogonaler Funktionen.

Im Fall einer auf dem Rande freigelagerten Platte nimmt das Gleichungssystem (16) beim Einsetzen von (11) und (18) nachstehende Form an:

$$\sum_m B_m sh m \pi \varphi_m \beta \sum_r b_{rm} \sin r \pi \sigma = 0, \\ \sum_m D_m sh m \pi \psi_m \beta \sum_r d_{rm} \sin r \pi \sigma = 0, \quad (m, r = 1, 3, 5, \dots)$$

wo:

$$b_{rm} = \frac{(mr + \Phi)(-1)^j}{(m^2 - \Phi)\beta^2 + j^2} + \frac{(mr - \Phi)(-1)^k}{(m^2 - \Phi)\beta^2 + k^2}, \\ d_{rm} = \frac{(mr + \Psi)(-1)^j}{(m^2 - \Psi)\beta^2 + j^2} + \frac{(mr - \Psi)(-1)^k}{(m^2 - \Psi)\beta^2 + k^2}.$$

Die Koeffizienten von  $\sin r \pi \sigma$  müssen für jeden der Werte  $r$  gleich Null sein. Auf diese Weise kommen wir zu folgendem System algebraischer Lineargleichungen:

$$\sum_m B'_m b_{rm} = 0, \quad \sum_m D'_m d_{rm} = 0 \quad (m, r = 1, 3, 5, \dots), \quad (19)$$

worin:

$$B'_m = B_m sh m \pi \varphi_m \beta, \quad D'_m = D_m sh m \pi \psi_m \beta.$$

Die durchgeführte Analyse zeigt, daß es genügt eine von den Determinanten des Systems (19) Null zu setzen, um eine Gleichung zu erzielen, deren Wurzeln uns die Eigenwerte des Problems geben. Diese Gleichung hat als nachstehende Form:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} & \dots \\ a_{31} & a_{33} & a_{35} & \dots \\ a_{51} & a_{53} & a_{55} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0, \quad (20)$$

wo:

$$a_{rm} = \frac{(mr \beta^2 + X)(-1)^j}{m^2 \beta^2 + j^2 - X} + \frac{(mr \beta^2 - X)(-1)^k}{m^2 \beta^2 + k^2 - X}, \\ X = \beta^2 \Phi \text{ oder } X = \beta^2 \Psi.$$

In der Tabelle 1 wurden die Werte  $X$  für einige regelmäßige Polygone angegeben, die wir bei Beschränkung der Gleichung (20) auf die Determinante erster und zweiter Ordnung erhalten haben. In der letzten Zeile wurden zum Vergleich die bekannten exakten Lösungen angegeben.

Tabelle 1

Anzahl der Polygonseiten	n	3	4	5	6	8	$\infty$
Determ. I. Ordg.	$X =$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
Determ. II. Ordg.	$X =$	0,444	0,500	0,521	0,529	0,535	0,536
Exakte Lösungen	$X =$	0,444	0,500				0,426 — 1,488

Um die erste Frequenz der Eigenschwingungen oder den geringsten Wert der kritischen Druckkraft zu erzielen, genügt es, die in der Tabelle 1 angegebenen Werte  $X$  in die nachfolgenden Formeln einzusetzen:



$$\omega = \frac{X \pi^2}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\mu}} \sqrt{1 - \frac{N R^2}{X \pi^2 D} + \frac{K R^4}{X^2 \pi^4 D}}, \quad (21)$$

$$N_{kr} = \frac{X \pi^2 D}{R^2} \left( 1 + \frac{K R^4}{X^2 \pi^4 D} \right), \quad (22)$$

in welchem  $R = \beta a$  den Radius des eingeschriebenen Kreises bezeichnet.

Es sei hier auf die Divergenz hingewiesen, die zwischen dem für das  $n$ -Eck bei  $n \rightarrow \infty$  erhaltenen Wert und dem entsprechenden Eigenwert der freigelagerten Kreisplatte besteht. Wir haben hier die Erscheinung einer fehlenden Stabilität der Definitionsgebiete, die im Fall einer statischen Belastung von I. Babuška<sup>1</sup>, festgestellt wurde. Das von uns erhaltene Resultat,  $X = 0,536$ , ist zwischen den Werten enthalten, die sich auf die freigelagerte Kreisplatte,  $X = 0,426$ , und auf die eingespannte Kreisplatte,  $X = 1,488$ , beziehen (vgl.<sup>2</sup>, S. 249–254).

Untersuchen wir noch den Fall einer auf dem Rande eingespannten  $n$ -Eckplatte. Wir beschränken uns hier auf die Lösung des Stabilitätsproblems der Platte, indem wir Folgendes annehmen:

$$K = \omega = \Omega = \Phi = 0, \quad \Psi = 2A, \quad X = \beta^2 \Psi. \quad (23)$$

Die Bedingungen (16) nach Einsetzen von (12), (14) und (23) führen nach einfacher Umformung zum folgenden linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} & \sum_m A_m m \left[ \frac{(-1)^j ch m \pi \beta - 1}{m^2 \beta^2 + j^2} + \frac{(-1)^k ch m \pi \beta - 1}{m^2 \beta^2 + k^2} \right] + \\ & + \sum_m B_m m sh m \pi \beta \left[ \frac{(-1)^j}{m^2 \beta^2 + j^2} + \frac{(-1)^k}{m^2 \beta^2 + k^2} \right] = 0, \\ & \sum_m A_m \left[ (m r \beta^2 + X) \frac{(-1)^j ch m \pi \psi_m \beta - 1}{m^2 \beta^2 + j^2 - X} + (m r \beta^2 - X) \frac{(-1)^k ch m \pi \psi_m \beta - 1}{m^2 \beta^2 + k^2 - X} \right] + \\ & + \sum_m B_m \frac{sh m \pi \psi_m \beta}{\psi_m} \left[ \frac{(m r \beta^2 + X) (-1)^j}{m^2 \beta^2 + j^2 - X} + \frac{(m r \beta^2 - X) (-1)^k}{m^2 \beta^2 + k^2 - X} \right] = 0 \\ & (m, r = 1, 3, 5, \dots). \end{aligned}$$

Wenn wir in der ersten, selbstverständlich wenig genauen Annäherung, annehmen, daß nur  $A_1$  und  $B_1$  verschieden von Null und alle sonstige Konstanten  $A_m$  und  $B_m$  (für  $m = 3, 5, 7, \dots$ ) gleich Null sind, erhalten wir die Determinante zweiter Ordnung, die Null gesetzt, uns folgende transzendente Gleichung gibt:

$$\frac{sh \pi \beta}{\beta [ch \pi \beta - (2 \beta^2 + 1)]} - \frac{sh \pi \sqrt{\beta^2 - X}}{\sqrt{\beta^2 - X} \left( Ch \pi \sqrt{\beta^2 - X} + \frac{2 \beta^2 + 1}{2 X - 1} \right)} = 0. \quad (24)$$

Die aus dieser Gleichung berechneten Wurzeln  $X$  haben wir für einige  $n$ -Ecke in der Tabelle 2 zusammengestellt.

<sup>1</sup> I. Babuška: „Die Abhängigkeit der Lösung der Elastizitätsprobleme von kleinen Veränderungen des Definitionsgebietes“, ZAMM, 39, H. 9/11, S. 411–412, 1959.

<sup>2</sup> A. Nádaí: „Die elastischen Platten“, Berlin, 1925.

Tabelle 2

Anzahl der Polygonseiten	n	3	4	5	6	8
Wurzeln der Gleichung (24)	X	1,89	1,83	1,75	1,66	1,42

Die kritische Belastung finden wir in diesem Fall aus der Formel:

$$N_{kr} = \frac{X \pi^2 D}{R^2} \quad (25)$$

Auf ähnliche Weise können wir auch die statischen Durchbiegungen von symmetrisch belasteten regelmäßigen  $n$ -Eckplatten bestimmen. Hier muß jedoch vermerkt werden, daß die Konvergenz der hierbei erhaltenen Reihen überaus schwach ist.

Die in der vorliegenden Arbeit für polygonale Platten angewandte Lösungsmethode wird in der unter meiner Führung vorbereiteten, einstweilen noch nicht veröffentlichten Doktordissertation von Z. Reipert<sup>3</sup>, in allgemeiner Form besprochen.

(Eingegangen am 5. Oktober 1960)

## Der moderne Stahlhochbau und das Feuer

Von Curt F. Kollbrunner, Zollikon/Zh.

Mit 3 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Es wird die Frage der Einführung eines Punktsystems zur Beurteilung der Feuersicherheit von Stahlhochbauten diskutiert.

Trotzdem das Österreichische Ingenieur-Archiv das Gebiet der angewandten Mathematik behandelt, soll hier, zum 70. Geburtstag von E. Melan, eine Ausnahme gemacht und das heute für den Stahlhochbau wichtigste Gebiet, nämlich dasjenige der Feuersicherheit skizziert werden, für welches E. Melan weit vorausblickender Wegbereiter war.

Melan<sup>1</sup> hat schon im Jahre 1931 gezeigt, daß der Stahlbau feuersicher ist. Vor bald 30 Jahren hat er weit vorausschauend und vorausplanend mit einer kurzen, leider später in Vergessenheit gefallenen Publikation bewiesen, wie unverkleidete Stahlkonstruktionen selbst einem Großbrand widerstehen können.

Bei Ausbruch des Brandes im Warenhaus „ARA“ in Prag war keine Stahlstütze verkleidet. Trotzdem sich das Feuer mit unheimlicher Schnelligkeit ausdehnte, hat das Stahlgerippe den Brand in einer Weise überstanden, welche die kühnsten Erwartungen übertraf. Die Schäden an der Stahlkonstruktion waren im Verhältnis zu den-

<sup>3</sup> Z. Reipert: „Zastosowanie pojedynczych szeregów funkcyjnych do rozwiązywania zadań ze statyki, stateczności i dynamiki płyt o nietypowych kształtach“ („Die Anwendung einfacher Funktionsreihen zur Lösung von Statik-, Stabilitäts- und Dynamikproblemen von Platten nicht-typischer Formen“), Doktordissertation, nicht veröffentlicht.

<sup>1</sup> E. Melan: Das Großfeuer in dem Stahlskelettbau des Warenhauses „ARA“ in Prag. Bauingenieur, Heft 27, S. 498, (1931).

jenigen im Mauerwerk, Eisenbeton und an den Hohlsteinkonstruktionen verschwindend klein. Von den Stützen wies nur eine einzige, die mitten im Zentrum des Brandes stand, eine schwerere Beschädigung auf, die auf eine Länge von ca. vier Metern ihre Auswechslung notwendig machte, wobei diese Auswechslung in der Rekordzeit von 20 Minuten vorgenommen wurde.

Selbstverständlich wissen die Stahlbaukonstrukteure, daß verschiedene Stahlkonstruktionen bei einem katastrophalen Großbrand einstürzen. Dabei handelte es sich jedoch immer um Feuerbelastungen, die nicht hätten zugelassen werden dürfen, wie auch um Stahlkonstruktionen, die nicht nach den neuesten Erfahrungen gebaut wurden<sup>2</sup>.

Die Feuerbelastung bedeutet den Heizwert aller im Bau oder einem bestimmten Gebäudeteil vorhandenen brennbaren Materialien, (berechnet auf eine entsprechende Holzmenge), bezogen auf die Einheit der Bodenfläche. ( $\text{kg Holz/m}^2$  Bodenfläche).

Früher wurde dem Prinzip der Feuerbelastung als Kriterium der Feuergefährlichkeit entgegengehalten, daß bei verändertem Verwendungszweck eines Gebäudes und dadurch erhöhter Feuergefahr unverantwortliche Zustände entstehen können. Diesem Einwand kann jedoch mit Recht die Praxis entgegengehalten werden, die in der Bautechnik ganz allgemein Gültigkeit hat. Genau wie eine statische Überdimensionierung der Stahlkonstruktion auf größere als die vorgesehenen Lasten nicht in Frage kommt, müssen auch übertriebene Feuerschutzmaßnahmen abgelehnt werden. Dafür zu sorgen, daß bei veränderten Voraussetzungen die baulichen Vorkehrungen getroffen werden, ist Sache der Feuerpolizei.

Die vor einigen Jahren durchgeführten Untersuchungen des schweizerischen Brandverhütungsdienstes haben ergeben, daß die Feuerbelastung in Bureaugebäuden moderner Bauart zwischen 8 und maximal  $25 \text{ kg/m}^2$  schwankt. (Archive selbstverständlich ausgenommen.)

Gegen die neuzeitlichen, fortschrittlichen Stahlbauer, welche die Gefahr des Feuers richtig einschätzen, gleichzeitig aber die kleine Feuerbelastung in modernen Bureau- und Geschäftshäusern kennen und daher auf Grund ihrer Versuche und Erfahrungen bei Feuerbelastungen bis maximal  $25 \text{ kg/m}^2$  die unverkleidete Stahlkonstruktion fordern, stemmt sich das Beharrungsvermögen, der Zweifel, die Unkenntnis, die Überheblichkeit und das Besservissen<sup>3</sup>.

Stets ist es am schwierigsten, das Beharrungsvermögen zu brechen, beharrt doch jeder mittelmäßig Intelligente auf dem, was bis heute als richtig erkannt wurde; er hat Angst vor dem Fortschritt. Der Zweifel kann durch eindeutig durchgeführte Versuche gebrochen werden. Der Unkenntnis begegnet man am besten mit klaren, eindeutigen Resultaten der neuesten Versuche. Die Überheblichkeit und das Besservissen können diplomatisch und freundschaftlich ausgeschaltet werden.

Bei jedem Fortschritt und Weitblick hat die große Masse der Ingenieure stets Furcht vor dem für sie noch Unbekannten, nicht einmal Erahnten. Heute stehen die Stahlbaukonstrukteure jedoch vor einer Schicksalsstunde eines nicht mehr aufzuhaltenden Fortschrittes, welchen E. Melan schon vor 29 Jahren vorausgesagt hat. Für die neuzeitlichen Wissenschaftler gibt es kein „unmöglich“. Wenn auch die ewig

<sup>2</sup> C. F. Kollbrunner: Feuersicherheit der Stahlkonstruktionen, III. Teil. (Feuerversuche mit belasteten Stahlrahmen.) Mitteilungen der Technischen Kommission des Schweizer Stahlbauverbandes, Heft 18, Februar 1959. Schweizer Stahlbauverband, Zürich.

<sup>3</sup> C. F. Kollbrunner: Jahresbericht 1959 der Kommission 3 (Feuerschutz) der Europäischen Konvention der Stahlbauverbände. Februar 1960.

C. F. Kollbrunner: Stahlhochbau und Feuerpolizei. (Stand April 1960). Europäische Konvention der Stahlbauverbände, Kommission 3 (Feuerschutz).



Gestrigen, die an der Vergangenheit kleben, uns ein „zu früh“ oder „zu gefährlich“ entgegenschleudern, schauen die Stahlbauer doch stets hoffnungsvoll und zuversichtlich in die Zukunft.

Da heute meist als „feuerbeständig“ Bauteile aus nicht brennbaren Baustoffen bezeichnet werden, die während mindestens  $1\frac{1}{2}$  Stunden unter der Einwirkung des Feuers und des Löschwassers ihr Gefüge nicht wesentlich ändern und damit ihre Tragfähigkeit und ihre Standsicherheit nicht über das zulässige Maß verlieren, ist es unlogisch, bei modernen Büro- und Geschäftshäusern mit einer Feuerbelastung von 8 bis maximal  $25 \text{ kg/m}^2$ , d. h. einer für den Einzelraum maximalen Branddauer von etwa 20 Minuten (sofern man als Branddauer die Zeit des Erreichens und teilweise Überschreitens der maximalen Temperaturen in der Höhe der Standardkurve annimmt) eine Brandsicherheit für 90 Minuten zu verlangen. Eine so lange Branddauer kann in modernen Büro- und Geschäftshäusern überhaupt nicht mehr auftreten.

Stets ist daran zu denken, daß die Feuerbelastung die Brandgefahr entscheidend beeinflußt, hängt doch von ihrer Größe die Branddauer und damit die Brandtemperatur ab. Wie W. Geilinger<sup>4</sup> angibt, besitzen heute Verwaltungsgebäude moderner Konstruktionsweise Feuerbelastungen von weniger als  $12 \text{ kg/m}^2$ , d. h. von nur der Hälfte der oben angegebenen Feuerbelastung.

Das Brandrisiko setzt sich aus verschiedenen Faktoren zusammen: Zündquellen, Brennbarkeit, Feuerbelastung, Branddauer, Brandausbreitungsmöglichkeit, Verqualmung, Luftzutritt, Schadenanfälligkeit, Einsatz der Feuerwehr. Die Feuerpolizei wehrt sich mit Recht dagegen, daß als einziges Kriterium für die Brandgefährdung die Feuerbelastung eingeführt wird. Dies war jedoch auch nie die Meinung, denn schon vor 10 Jahren ist ein Punktsystem publiziert worden, welches damals 15 Positionen umfaßte, wobei die Feuerbelastung lediglich als Position N. 7 aufgeführt wurde<sup>5</sup>.

Wenn auch heute das Punktsystem noch nicht endgültig ist, handelt es sich doch darum, die verschiedenen Meinungen zusammenzufassen und auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen, damit darüber diskutiert und schließlich eine Norm aufgestellt werden kann<sup>6</sup>.

Die Brandversuche werden in den meisten Ländern unter ähnlichen Bedingungen ausgeführt. Prinzipiell muß jedoch zwischen den Standardkurven und den wirklich auftretenden Bränden ein klarer Trennungsstrich gezogen werden. Ein Brand entwickelt sich nie nach einer Standardkurve, sondern je nach den vorhandenen Verhältnissen, bei viel Luftzutritt rasch, bei wenig Luft langsam, eventuell auch nur mottend.

Beim Naturbrand liegen die auftretenden Temperaturen im allgemeinen viel tiefer als die Norm- oder Standardkurve angibt. Die Zeit-Temperatur-Kurve verläuft in Wirklichkeit meist so, daß nach dem Feuersprung ein rascher Anstieg der Temperatur

<sup>4</sup> W. Geilinger: Feuer und Stahl. Dritte Schweizerische Stahlbautagung, Lausanne, 1960. Mitteilungen der Technischen Kommission des Schweizer Stahlbauverbandes, Heft 21, (1960).

<sup>5</sup> E. Geilinger und C. F. Kollbrunner: Feuersicherheit der Stahlkonstruktionen, I. Teil. Mitteilungen der T.K.V.S.B., Nr. 3, Verlag Leemann, Zürich, Mai 1950.

<sup>6</sup> P. Boué: Der Feuerschutz im Stahlhochbau, insbesondere von Stahlstützen. Berichte des Deutschen Ausschusses für Stahlbau, Heft 21, Stahlbau-Verlags GmbH., Köln, 1959.

W. Halpaap: Die Bestimmung des notwendigen Schutzes wesentlicher Bauteile nach Punkten. VFDB-Zeitschrift, Heft 4, S. 124, November 1959.

P. Boué: Beitrag zur Frage des Feuerschutzes von Stahlhochbauten. I.V.B.H., 6. Kongress, Stockholm, Vorbericht, S. 421, (1960).

C. F. Kollbrunner: Ausbildung der Stahlkonstruktionen in Bezug auf die Feuersicherheit. I.V.B.H., 6. Kongress, Stockholm, Vorbericht, S. 449, (1960).

mit einer über der Standardkurve liegenden Spitze erfolgt, worauf ein flacher, langgezogener Abfall stattfindet. Abb. 1 zeigt die EMPA-Standardkurve für Ofenversuche, wie auch die Zeit-Temperatur-Kurven bei „natürlichem“ und langsamem Brand mit Feuerbelastungen von  $25 \text{ kg/m}^2$ .

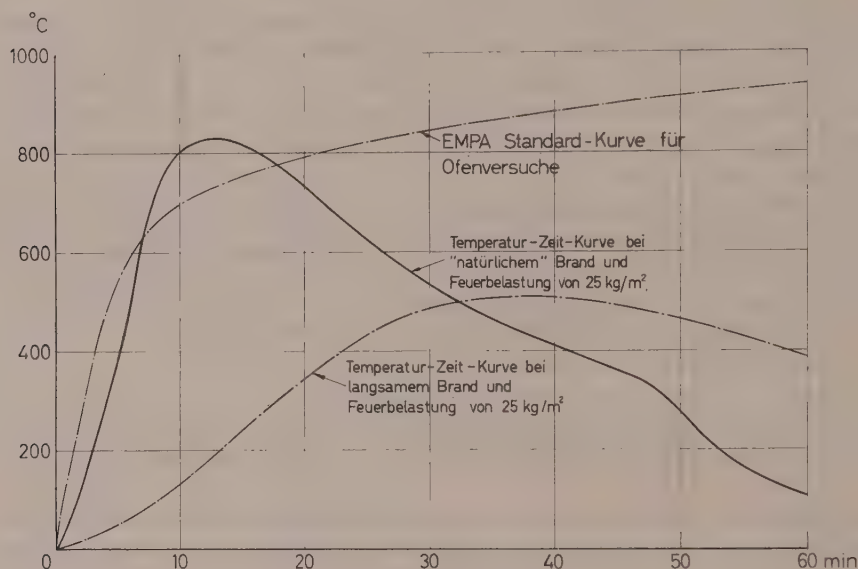


Abb. 1. Zeit-Temperatur Kurven

Das vereinfachte Punktsystem besteht aus Tabellen und graphischen Darstellungen, die heute als Diskussionsbasis aufgestellt wurden<sup>7</sup>. Die verschiedenen, in der Schweiz. Bauzeitung vom 3. März 1960 in Tabellenform veröffentlichten Positionen sind hier in den Abb. 2 und 3 graphisch dargestellt.

Dabei handelt es sich um folgende Positionen:

Pos. Nr. 1:	Höhe des Gebäudes oder der Geschoße
Pos. Nr. 2:	Innenfläche der Räume.
Pos. Nr. 3:	Dachhaut.
Pos. Nr. 4:	Verwendung des Gebäudes oder Raumes.
4.1:	Feuerbelastung.
4.2:	Zuschläge für gefahrerhöhende Nutzung.
Pos. Nr. 5:	Gefährdung der Nachbarschaft.
Pos. Nr. 6:	Feuerbekämpfung.
Pos. Nr. 7:	Rauch- und Wärmeabzug.

Außerdem kann die Lage, die Größe und die Art der Bauteile noch speziell berücksichtigt werden.

<sup>7</sup> C. F. Kollbrunner: Bewertung des Feuerschutzes der Stahlkonstruktionen nach dem Punktsystem. Schweiz. Bauzeitung, Heft 9, S. 142, 3. März 1960.

C. F. Kollbrunner: Beurteilung der Feuersicherheit von Stahlhochbauten. I.V.B.H., 6. Kongress, Stockholm, Schlußbericht, (1960).

Aus Abb. 2 ersieht man, daß bis zu einer Feuerbelastung von  $25 \text{ kg/m}^2$  die Stahlkonstruktion nicht verkleidet werden muß. Über die Größe der Plus- und Minuspunkte kann dabei noch verhandelt werden.

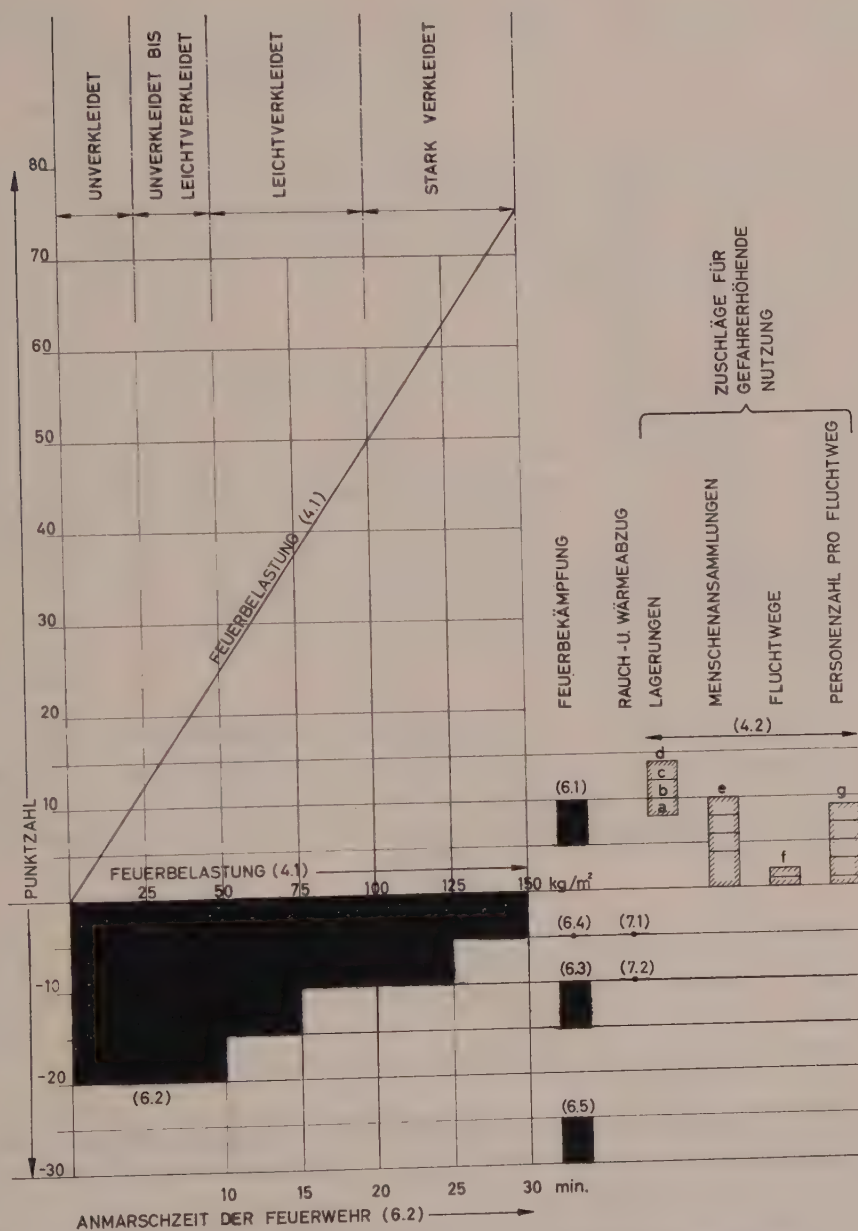


Abb. 2. Verwendung des Gebäudes (4) und Feuerbekämpfung (6 und 7)

Bei Stahlkonstruktionen muß selbstverständlich eine Differenzierung betreffend ihrer Feuergefährlichkeit vorgenommen werden. Leichte Fachwerkbinder oder sehr dünnwandige Vollwandträger, wie sie bei Hallen und Shedkonstruktionen zur Ver-



wendung kommen, haben naturgemäß ein kleineres Wärmeschluckvermögen als Stahlkonstruktionen in Geschosßbauten.

Wichtiger als jede Verkleidung von Stahlkonstruktionen ist jedoch stets, daß man

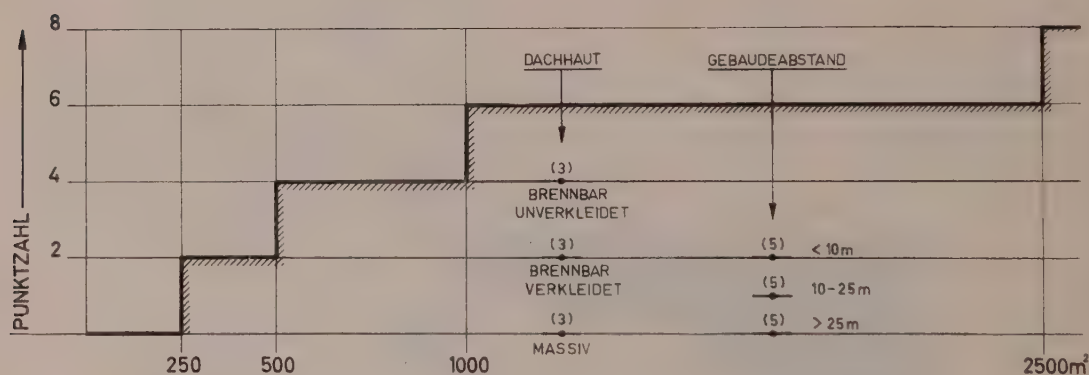
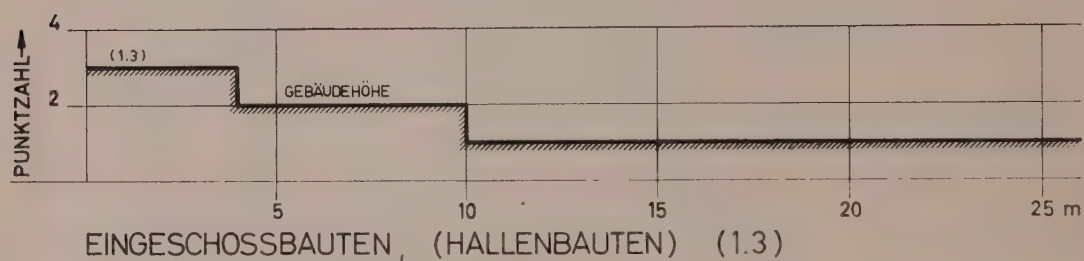
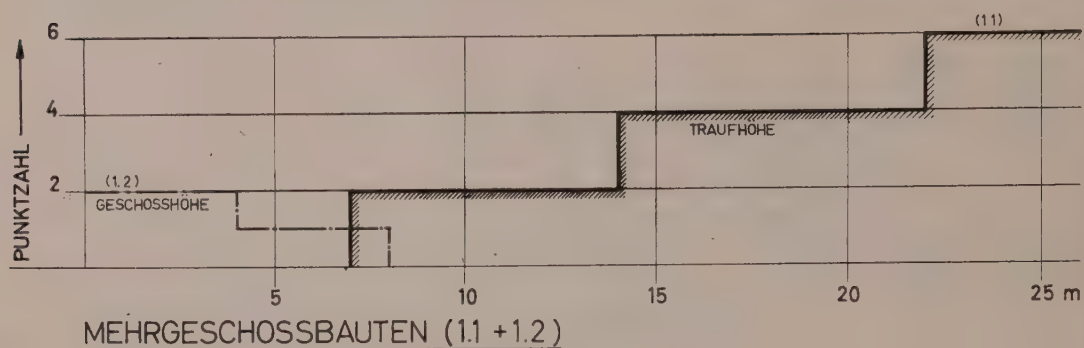


Abb. 3. Innenfläche (2), Dachhaut (3), und Gebäudeabstand (5)

darauf achtet, die Feuerbelastung möglichst klein zu halten. Außerdem sollte eine rasch einsatzbereite Feuerwehr vorhanden sein, so daß, auch bei Großbränden, keine Menschenleben gefährdet werden können.

Wir stehen heute vor der Verwirklichung eines einfachen Punktsystems und wissen, daß in Zukunft viel weniger Stahlkonstruktionen verkleidet werden müssen als bis heute.

(Eingegangen am 23. September 1960)

# Ausbreitung der Wärmespannungen in viskoelastischen Körpern

Von W. Nowacki, Warszawa

**Zusammenfassung.** Für einen linear-viskoelastischen Körper mit temperaturunabhängigen physikalischen Kennwerten unter der Wirkung verschiedener instationärer Temperaturfelder werden Lösungen für die Spannungsausbreitung angegeben. Besonderes Augenmerk wird dem Biotschen Körper zugewandt.

Die Arbeiten auf dem Gebiet der Analyse von Wärmespannungen in viskoelastischen Körpern sind erst kürzlich aufgenommen worden, wobei hauptsächlich das Körpermodell mit linearer Charakteristik als Grundlage diente. Die Aufmerksamkeit der Forscher konzentrierte sich in erster Linie auf quasistatische Probleme, also solche, bei denen man bei langsamer zeitlicher Änderung des Temperaturfeldes die inertialen Kräfte außer acht lassen konnte.

Die Untersuchungen auf diesem Gebiet wurden durch die Arbeiten von H. H. Hilton<sup>1</sup> und A. Freudenthal<sup>2</sup> eingeleitet. Das bekannte Korrespondenzprinzip zwischen den Lösungen auf dem Gebiet der linearen Elastizitätstheorie und der Viskoelastizität, das von T. Alfrey<sup>3</sup> in Bezug auf nichtkompressible Körper erdacht und von E. H. Lee<sup>4</sup> auf kompressible Körper verallgemeinert wurde, ist von H. H. Hilton<sup>1</sup> und E. Sternberg<sup>5</sup> auf Probleme der veränderlichen Wärmespannungen ausgedehnt worden. H. Parkus<sup>6</sup> und W. Nowacki<sup>7</sup> führten das thermo-visko-elastische Verschiebungspotential ein, indem sie es bei der Lösung einer Reihe quasistatischer Probleme zur Anwendung brachten. E. Sternberg<sup>5</sup> bearbeitete eingehend das Problem der Wärmespannungen im unendlichen Raum mit kugeligem Hohlraum, während M. Sokolowski<sup>8</sup> sich mit diesen in einer viskoelastischen Kugel herrschenden Vorgängen befaßte.

Man kann wohl sagen, daß die grundsätzlichen theoretischen Probleme, soweit sie die Wärmespannungen in viskoelastischen Körpern mit linearer Charakteristik betreffen, zur Zeit als bewältigt angesehen werden können; die Bemühungen der Forscher erstrecken sich nunmehr auf die Untersuchung quasistatischer Wärmespannungen in viskoelastischen Werkstoffen, welche rheologische Eigenschaften aufweisen, die von der Temperatur abhängen<sup>9, 10</sup>.

<sup>1</sup> H. H. Hilton: "An extension of Alfrey's elastic-visco-elastic analogy to viscoelastic thermal stress problems". Rep. No. TSVE — TR-2, Dep. Aero Eng., University of Illinois (1953).

<sup>2</sup> A. Freudenthal: "Effect of rheological behavior on thermal stresses". Journ. of Appl. Physics, 25 (1954).

<sup>3</sup> T. Alfrey: "Non homogenous stresses in visco-elastic media". Quart. Appl. Mech. 8 (1950).

<sup>4</sup> E. H. Lee: "Stress analysis in visco-elastic bodies" Quart. Appl. Math. 13 (1955).

<sup>5</sup> E. Sternberg: "On transient thermal stresses in linear visco-elasticity". Proc. of the third US National Congr. Appl. Mech., New York (1958).

<sup>6</sup> H. Parkus: „Instationäre Wärmespannungen“, Wien (1959).

<sup>7</sup> W. Nowacki: "Thermal stresses due to the action of heat sources in a viscoelastic space". Arch. Mech. Stos. 11 (1959).

<sup>8</sup> M. Sokolowski: „Wärmespannungen in einer Kugel, die aus einem Werkstoff von visco-elastischer Eigenschaft hergestellt ist“ (polnisch). Jubiläumsschrift von Prof. W. Wierzbicki, Warszawa (1959).

<sup>9</sup> H. H. Hilton: "Thermal stresses in thick-walled cylinders exhibiting temperature-dependent viscoelastic properties of the Kelvin type". Proc. Second. US Nat. Congr. Appl. Mech. (1954).

<sup>10</sup> R. Muki and E. Sternberg: "On transient thermal stresses in viscoelastic materials with temperaturedependent properties". Im Druck.

Der Ausbreitung von Wärmespannungen im viskoelastischen Körper mit linearer Charakteristik wurden bisher nur wenige Arbeiten gewidmet. Hier wären die Arbeit von A. Katasonow<sup>11</sup> sowie die Arbeiten von W. Nowacki<sup>12 13</sup> zu nennen.

In der vorliegenden Arbeit werden wir einige Lösungsvarianten für Spannungsausbreitung im unendlichen Raum sowie für eindimensionale Probleme, die sich auf den Halbraum und die Schicht aus viskoelastischem Werkstoff beziehen, angeben.

## I. Grundbeziehungen und Gleichungen

Wir untersuchen einen viskoelastischen, isotropen und homogenen Körper mit linearer Charakteristik, welcher der Wirkung eines nichtstationären Temperaturfeldes ausgesetzt ist. Wir werden uns auf kleine Verzerrungen beschränken und voraussetzen, das sowohl die mechanischen als auch die thermischen Moduli nicht von der Temperatur abhängen. Die Annahme einer Unabhängigkeit physikalischer Konstanten von der Temperatur bildet eine ernsthafte Beschränkung, sie verneint nämlich die Empfindlichkeit des Viskositätsmoduls in bezug auf die Temperatur. Die Berücksichtigung einer Veränderlichkeit des Moduls ist zwar möglich<sup>9</sup>, sie versucht jedoch erhebliche analytische Schwierigkeiten schon für einfachste quasistatische Probleme.

Das Gleichungssystem, welches die Ausbreitung thermischer Spannungen in einem viskoelastischen Körper mit linearer Charakteristik beschreibt, besteht aus linearen Beziehungen zwischen Spannungs- und Verzerrungszustand, aus linearen Beziehungen zwischen Verzerrungs- und Verschiebungszustand sowie aus den Bewegungsgleichungen.

Die Beziehungen zwischen den Komponenten des Spannungs- und Verzerrungszustandes nehmen wir in nachstehender Form an<sup>4,5</sup>:

$$P_1(D) s_{ij} = P_2(D) e_{ij}, \quad (1.1)$$

$$P_3(D) \sigma_{ii} = P_4(D) (\varepsilon_{ii} - 3 \alpha_i T). \quad (1.2)$$

Hier ist  $T$  die Temperatur,  $\alpha_i$  der Koeffizient der linearen thermischen Ausbreitung,  $s_{ij}$  und  $e_{ij}$  die Deviatoren des Spannungs- und Verzerrungszustandes,

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}, \quad (1.3)$$

während  $\sigma_{ij}$  und  $\varepsilon_{ij}$  die Komponenten des Spannungs- und Verzerrungstensors sind. Die Operatoren  $P_i(D)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  sind lineare Differentialoperatoren in bezug auf die Zeit  $t$

$$P_i(D) = \sum_{n=0}^{N_i} a_i^{(n)} D^n, \quad D = \frac{\partial}{\partial t}, \quad a_i^{(N_i)} \neq 0 \quad (1.4)$$

und die  $a_i^{(n)}$  sind konstante Größen.

In bezug auf das rechtwinkelige kartesische System nehmen die Beziehungen zwischen den Komponenten des Verzerrungszustandes und den Verschiebungen  $u_i$  die Form an

<sup>11</sup> A. Katasonow: „Die Ausbreitung von sphärischen thermoviskoelastischen Wellen“ (russisch) Wiestn. Mosk. Univ. 3 (1957).

<sup>12</sup> W. Nowacki: „Thermal stress propagation in visco-elastic bodies“ (I), Bull. Acad. Pol. Sci. s. techn. 7 (1959).

<sup>13</sup> W. Nowacki: „Thermal stress propagation in visco-elastic bodies“ (II), Bull. Acad. Pol. Sci. s. techn. 7 (1959).



$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1.5)$$

Wenn wir in den Bewegungsgleichungen

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i \quad (1.6)$$

die Spannungen durch die Verzerrungen ausdrücken und die letzteren wieder durch die Verschiebungen, dann erhalten wir folgendes System von Verschiebungsgleichungen

$$L_1(D) u_{i,kk} + L_2(D) u_{k,ki} = L_3(D) T_{,i} + \rho L_4(D) \ddot{u}_i \quad (1.7)$$

wo

$$\begin{aligned} L_1(D) &= P_2(D) P_3(D), \quad L_2(D) = \frac{1}{3} [2 P_4(D) P_1(D) + P_2(D) P_3(D)], \\ L_3(D) &= 2 P_4(D) P_1(D), \quad L_4(D) = 2 P_1(D) P_3(D). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Wenden wir auf die Gleichungen (1.7) die Laplacesche Transformation an, indem wir voraussetzen, daß für die Verschiebungen die homogenen Anfangsbedingungen gelten, so erhalten wir folgendes Gleichungssystem

$$\bar{\mu} \bar{u}_{i,kk} + (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \bar{u}_{k,ki} = \bar{\gamma} \bar{T}_{,i} + \rho p^2 \bar{u}_i, \quad (1.9)$$

wo

$$\bar{\mu} = \frac{P_2(p)}{2 P_1(p)}, \quad \bar{\lambda} = \frac{P_1(p) P_4(p) - P_2(p) P_3(p)}{3 P_1(p) P_3(p)}, \quad \bar{\gamma} = (3 \bar{\lambda} + 2 \bar{\mu}) \alpha_i,$$

Funktionen des Parameters  $p$  sind und wo ferner

$$\bar{f}(x_r, p) = L \{f(x_r, t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(x_r, t) dt,$$

die Laplacesche Transformation in bezug auf  $t$  der Funktion  $f(x_r, t)$  ist.

Lösen wir nun das System der Gleichungen (1.1), (1.2) nach  $\sigma_{ij}$  auf und führen die Laplace-Transformation aus, dann erhalten wir folgende Beziehungen

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2 \bar{\mu} \bar{\varepsilon}_{ij} + \delta_{ij} (\bar{\lambda} \bar{\varepsilon}_{kk} - \gamma \bar{T}). \quad (1.10)$$

Es wäre zu beachten, daß wir eine analoge Form zu den Gleichungen (1.9) auch im Falle viskoelastischer Körper mit linearer Charakteristik sowie kontinuierlicher Relaxionsspektren erhalten. Im Falle des Biotschen Körpers, wo die Beziehungen zwischen den Komponenten des Spannungs- und Verzerrungszustandes durch die Formeln gegeben sind<sup>14,15</sup>,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2 \int_0^t a(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{ij}(x_r, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \\ &+ \delta_{ij} \int_0^t \left\{ b(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \varepsilon_{kk}(x_r, \tau) - c(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} T(x_r, \tau) \right\} d\tau, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$c(t) = [3 b(t) + 2 a(t)] \alpha_i,$$

<sup>14</sup> M. A. Biot: "Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena" J. Appl. Phys., 25 (1954).

<sup>15</sup> D. S. Berry: "Stress propagation in visco-elastic bodies". J. Mech. Phys. Sol. 6 (1958).

nehmen die Bewegungsgleichungen die Form an

$$\int_0^t \left\{ a(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} u_{i,kk} + [a(t-\tau) + b(t-\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} u_{k,ki} \right\} d\tau = \\ = \int_0^t c(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} T_{,i} d\tau + \varrho \ddot{u}_i. \quad (1.12)$$

Nach Vornahme der Laplace-Transformation auf Grund der Gleichungen (1.12) erhalten wir das Gleichungssystem (1.9) mit der Maßgabe, daß

$$\mu = p \bar{a}, \quad \bar{\lambda} = p \bar{b}, \quad \gamma = p c. \quad (1.13)$$

Für einen linear-elastischen Körper haben die Bewegungsgleichungen die Form

$$\mu_0 u_{i,kk}^{(0)} + (\lambda_0 + \mu_0) u_{k,ki}^{(0)} = \gamma_0 T_{,i} + \varrho \ddot{u}_i^{(0)}, \\ \gamma_0 = (3\lambda_0 + 2\mu_0) \alpha_i. \quad (1.14)$$

Hier sind  $u_i^{(0)}$  die Komponenten des Verschiebungsvektors im vollkommen elastischen Körper und die Größen  $\mu_0, \lambda_0$  die Laméschen Konstanten.

Aus dem Vergleich der Gleichungen (1.14) und (1.9) ergibt sich die bekannte elastisch-viskoelastische Analogie.

Um eine Lösung des viskoelastischen Problems zu erhalten, benützen wir die bekannte Lösung des analogen elastischen Problems. In dieser ersetzen wir die Funktion  $u_i^{(0)}$  durch die Transformierte  $u_i$  und die Konstanten  $\lambda_0, \mu_0$  durch die Größen  $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ . Wenn wir die so modifizierte Lösung rücktransformieren, erhalten wir die gesuchte Lösung des viskoelastischen Problems.

## II. Lösung der Verschiebungsgleichung

Wir wollen das System der Verschiebungsgleichungen (1.9) mit Hilfe der Greenschen Funktionen  $G_i^{(s)}(x_r, \xi_r, t)$  lösen, die das Gleichungssystem erfüllen

$$\bar{\mu} \bar{G}_{i,kk}^{(s)} + (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \bar{G}_{k,ki}^{(s)} + \delta(x_r - \xi_r) \delta_{is} = \varrho p^2 \bar{G}_i^{(s)}. \quad (2.1)$$

Mit  $G_i^{(s)}(x_r, \xi_r, t)$  bezeichnen wir die Verschiebung des Punktes  $(x_r)$  in Richtung der Achse  $x_i$ , welche durch die momentan konzentrierte im Punkt  $(\xi_r)$  angreifende Einzelkraft, die in Richtung der Achse  $x_s$  wirkt, hervorgerufen wurde. Die Gleichungen (2.1) stellen drei Gleichungssysteme dar ( $s = 1, 2, 3$ ), die wiederum je drei Gleichungssysteme umfassen ( $i = 1, 2, 3$ ). Wenn die Funktionen  $G_i^{(s)}$  als bekannt vorausgesetzt werden, so läßt sich die Lösung der Gleichungen in der Form darstellen

$$\bar{u}_i(x_r, p) = -\bar{\gamma} \int_V G_i^{(s)}(x_r, \xi_r, p) \frac{\partial T(\xi_r, p)}{\partial \xi_s} dV(\xi_r), \quad (2.2)$$

oder

$$u_i(x_r, p) = \gamma \int_V T(\xi_r, p) \frac{\partial G_s^{(i)}(\xi_r, x_r, p)}{\partial \xi_s} dV(\xi_r) \\ + \bar{\gamma} \int_V \bar{T}(\xi_r, p) \bar{\Theta}_i(\xi_r, x_r, p) dV(\xi_r). \quad (2.3)$$

Wir haben uns hier den Maxwellschen Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen sowie den Greenschen Integralsatz zunutze gemacht,

$$G_i^{(s)}(x_r, \xi_r, p) = G_s^{(i)}(\xi_r, x_r, p). \quad (2.4)$$

In der Gleichung (2.3) bedeutet  $\Theta_i(\xi_r, x_r, t)$  die Dilatation im Punkte  $(\xi_r)$ , die durch Wirkung der momentan konzentrierten, in Punkt  $(x_r)$  wirksamen und in Richtung der Achse  $x_i$  gerichteten Einzelkraft hervorgerufen wurde. Wenn wir mit  $U_i(x_r, \xi_r, t)$  die Verschiebung des Punktes  $(x_r)$  in Richtung der Achse  $x_i$  bezeichnen, die durch die Wirkung des im Punkt  $(\xi_r)$  gelegenen momentanen Druckzentrum hervorgerufen wurde, so können wir der Gleichung (2.3) die nachfolgende Form geben

$$\bar{u}_i(x_r, p) = -\bar{\gamma} \int_V \bar{T}(\xi_r, p) \bar{U}_i(x_r, \xi_r, p) dV(\xi_r). \quad (2.5)$$

Im viskoelastischen Raum ist aber<sup>16</sup>

$$U_i(x_r, \xi_r, p) = -\frac{1}{4\pi(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{e^{-R p \bar{\sigma}}}{R} \right) \quad (2.6)$$

wo

$$R^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2, \quad \bar{\sigma}^2 = \frac{\bar{\rho}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}.$$

Mit Beachtung von (2.6), können wir die Beziehung (2.5) in der Weise darstellen

$$\bar{u}_i = \bar{\Phi}_{,i} \quad (2.7)$$

wo die Funktion  $\bar{\Phi}$  durch das Integral

$$\bar{\Phi}(x_r, p) = -\frac{\bar{m}}{4\pi} \int_V \frac{\bar{T}(\xi_r, p) e^{-R p \bar{\sigma}}}{R(x_r, \xi_r)} dV(\xi_r), \quad \bar{m} = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}, \quad (2.8)$$

gegeben ist.

Die Funktion  $\Phi$  ist das dynamische Potential der thermoelastischen Verschiebung.

Die Form der Funktion  $\Phi$  (2.8) zeigt, daß diese Funktion die Gleichung

$$\bar{\Phi}_{,kk} - p^2 \bar{\sigma}^2 \bar{\Phi} = \bar{m} \bar{T}, \quad \Phi(x_r, 0) = \dot{\Phi}(x_r, 0) = 0 \quad (2.9)$$

zu erfüllen hat.

In der Tat, wenn wir (2.7) in das Gleichungssystem (1.9) einsetzen und dieses nach  $x_i$  integrieren, erhalten wir die Gleichung (2.9). Die hier erzielten Resultate zeigen, daß das Temperaturfeld in einem unendlichen viskoelastischen Raum nur Dilatationswellen hervorrufen kann.

Wenn wir (2.7) in die Beziehungen (1.10) einsetzen und uns die Gleichung (2.9) zunutze machen, so können wir die Spannungstransformierte mit Hilfe der Funktion  $\Phi$  folgendermaßen ausdrücken

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2\bar{\mu} (\bar{\Phi}_{,ij} - \delta_{ij} \bar{\Phi}_{,kk}) + \delta_{ij} p^2 \bar{\rho} \bar{\Phi}. \quad (2.10)$$

Die Kenntnis der Funktion  $\Phi$  genügt also zur Bestimmung der Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen.

<sup>16</sup> W. Nowacki: "Stress propagation in an infinite visco-elastic body produced by a time-variable point force". Arch. Mech. Stos., 11 (1959).



Die Lösung der Gleichung (2.9) können wir gleichfalls in folgender Form darstellen

$$\bar{\Phi} = \int_V \bar{T}(\xi_r, p) \bar{\varphi}(x_r, \xi_r, p) dV \quad (2.11)$$

Daher ist

$$\Phi(x_r, t) = \int_0^t d\tau \int_V T(\xi_r, \tau) \varphi(x_r, \xi_r, t - \tau) d\tau. \quad (2.12)$$

Die Funktion  $\bar{\varphi}$  muß die Differentialgleichung

$$\bar{\varphi}_{,kk} - p^2 \bar{\sigma}^2 \bar{\varphi} = \bar{m} \delta(x_r - \xi_r) \quad (2.13)$$

mit den Anfangsbedingungen  $\varphi(x_r, 0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}(x_r, 0) = 0$  erfüllen.

Die Funktion  $\varphi(x_r, t)$  können wir demnach als dynamisches Potential der thermoelastischen Verschiebung<sup>17</sup> bezeichnen, das durch die Wirkung des Temperaturfeldes  $T(x_r, t) = \delta(x_r - \xi_r) \delta(t)$  hervorgerufen wurde.

Die Funktion  $\bar{\varphi}$  können wir, den räumlichen Eigenschaften des Temperaturfeldes entsprechend, spezialisieren. So haben wir im Falle eines Temperaturfeldes, das eine Symmetrie in bezug auf den Punkt aufweist, die Gleichung

$$(\partial_R^2 + 2R^{-1} \partial_R) \bar{\varphi} = \bar{m} \delta(R - R_0) \quad (2.14)$$

zu lösen. Wir erhalten

$$\varphi = \frac{2\bar{m}}{\pi} \frac{R_0}{R} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha R \sin \alpha R_0}{\alpha^2 + p^2 \bar{\sigma}^2} d\alpha, \quad (2.15)$$

oder

$$\bar{\varphi} = -\frac{\bar{m} R_0}{p \bar{\sigma} R} [sh R p \bar{\sigma} \cdot e^{-R_0 p \bar{\sigma}} H(R_0 - R) + sh R_0 p \bar{\sigma} \cdot e^{-R p \bar{\sigma}} H(R - R_0)] \quad (2.16)$$

wo  $H(z)$  die Heavisidesche Funktion ist. Die Funktion  $\bar{\Phi}$  bestimmen wir durch Integration

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} = & -\frac{\bar{m}}{p \bar{\sigma}} \left[ sh R p \bar{\sigma} \int_R^\infty \bar{T}(R_0, p) e^{-R_0 p \bar{\sigma}} R_0 dR_0 + \right. \\ & \left. + e^{-R p \bar{\sigma}} \int_0^R \bar{T}(R_0, p) sh R_0 p \bar{\sigma} R_0 dR_0 \right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Im Falle eines axial-symmetrischen Temperaturfeldes, das nur vom Radius  $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$  abhängig ist, nimmt die Funktion die Form an

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} = & -\bar{m} r^{-1/2} [I_0(p r \bar{\sigma}) K_0(r_0 p \bar{\sigma}) H(r_0 - r) + \\ & + K_0(r p \bar{\sigma}) I_0(r_0 p \bar{\sigma}) H(r - r_0)], \end{aligned} \quad (2.18)$$

<sup>17</sup> J. Ignaczak: "A dynamic nucleus of thermo-elastic strain in elastic infinite space and semi-space". Bull. Acad. Pol. Sci., s. techn. 7 (1959).

während wir die Funktion  $\bar{\Phi}$  aus der Formel

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} = & -\bar{m} r^{-1/2} [I_0(r, p, \bar{\sigma}) \int_r^\infty K_0(r_0, p, \bar{\sigma}) \bar{T}(r_0, p) dr_0 + \\ & + K_0(r, p, \bar{\sigma}) \int_0^r I_0(r_0, p, \bar{\sigma}) \bar{T}(r_0, p) dr_0] \end{aligned} \quad (2.19)$$

bestimmen.

Wenn das Temperaturfeld  $T(x_1, t)$  in Bezug auf die Ebene  $x_2 x_3$  symmetrisch ist, so bestimmen wir die Funktion  $\bar{\varphi}$  aus der Gleichung

$$\bar{\varphi}_{,11} - p^2 \bar{\sigma}^2 \bar{\varphi} = -\bar{m} [\delta(x_1 - \xi_1) + \delta(x_1 + \xi_1)]. \quad (2.20)$$

Die Lösung dieser Gleichung nimmt folgende Form an

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} = & -\frac{\bar{m}}{2 p \bar{\sigma}} [e^{-p \bar{\sigma}(x_1 - \xi_1)} H(x_1 - \xi_1) + e^{p \bar{\sigma}(x_1 - \xi_1)} H(\xi_1 - x_1) + \\ & + e^{-p \bar{\sigma}(x_1 + \xi_1)}], \quad x_1 \geq 0, \quad \xi_1 > 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

während wir die Funktion  $\bar{\Phi}$  nach der Formel

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} = & -\frac{\bar{m}}{2 p \bar{\sigma}} \left[ \int_0^{x_1} \bar{T}(\xi_1, p) e^{-p \bar{\sigma}(x_1 - \xi_1)} d\xi_1 + \right. \\ & \left. + \int_{x_1}^\infty \bar{T}(\xi_1, p) e^{\bar{\sigma} p(x_1 - \xi_1)} d\xi_1 + \int_0^\infty \bar{T}(\xi_1, p) e^{-\bar{\sigma} p(x_1 + \xi_1)} d\xi_1 \right], \end{aligned} \quad (2.22)$$

bestimmen.

Wenn das Temperaturfeld  $T(x_1, t)$  zur Ebene  $x_2 x_3$  antisymmetrisch ist, so nimmt die Funktion  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{\Phi}$  die Form an

$$\bar{\varphi} = -\frac{\bar{m}}{2 p \bar{\sigma}} [e^{-\bar{\sigma} p(x_1 - \xi_1)} H(x_1 - \xi_1) + e^{\bar{\sigma} p(x_1 - \xi_1)} H(\xi_1 - x_1) - e^{-p \bar{\sigma}(x_1 + \xi_1)}], \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} = & -\frac{\bar{m}}{2 p \bar{\sigma}} \left[ \int_0^{x_1} \bar{T}(\xi_1, p) e^{-\bar{\sigma} p(x_1 - \xi_1)} d\xi_1 + \right. \\ & \left. + \int_{x_1}^\infty \bar{T}(\xi_1, p) e^{\bar{\sigma} p(x_1 - \xi_1)} d\xi_1 - \int_0^\infty \bar{T}(\xi_1, p) e^{-\bar{\sigma} p(x_1 + \xi_1)} d\xi_1 \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Auf diese Weise realisieren wir den Fall des elastischen Halbraumes, der in der Ebene  $x_1 = 0$  frei von Spannungen ist.

Wenn im unendlichen Raum in gleichen Abständen  $h$  positive und negative ebene Temperaturkerne stationiert werden, so wird die Funktion  $\bar{\varphi}$  die Form annehmen:

$$\bar{\varphi} = -\frac{2 \bar{m}}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \xi_1 \sin \alpha_n x_1}{\alpha_n^2 + p^2 \bar{\sigma}^2}, \quad \alpha_n = \frac{n \pi}{h}. \quad (2.25)$$

Die Funktion  $\bar{\varphi}$  wird uns zur Bestimmung der Funktion  $\bar{\Phi}$  für die Schicht von der Stärke  $h$  dienen, in welcher das Temperaturfeld  $T(x_1, t)$  herrscht, unter der Voraussetzung, daß in den Begrenzungssebenen  $\sigma_{11} = 0$  ist.

Der hier dargestellte Weg zur Bestimmung der Funktion mit Hilfe des Potentials der thermoelastischen Verzerrung leistet besondere Dienste in den Fällen, in denen das Temperaturfeld zeitlich und räumlich unstetig ist.

Nachstehend weisen wir einen anderen Weg zur Bestimmung der Funktion  $\bar{\Phi}$ , der im Falle der Wirkung von Wärmequellen bequemer ist.

Wenn wir auf die Gleichung der Wärmeleitung

$$T_{,kk} - \frac{1}{\kappa} \dot{T} = -\frac{Q}{\kappa}, \quad (2.26)$$

die Laplace-Transformation ausüben, so erhalten wir

$$\bar{T}_{,kk} - \frac{p}{\kappa} \bar{T} = -\frac{\bar{Q}}{\kappa}, \quad T(x_r, 0) = 0. \quad (2.27)$$

In der Gleichung (2.26) ist  $\kappa = \lambda/\rho c$ , wo  $\lambda$  der Koeffizient der Wärmeleitung,  $\rho$  die Dichte und  $c$  die spezifische Wärme ist. Dann wird  $Q = W/\rho c$ , wo  $W$  die durch die Wärmequelle in der Zeit — und Volumeninhalt erzeugte Wärme bedeutet. Eliminieren wir nun aus der Gleichung (2.9) die Funktion  $\bar{T}$ , indem wir von der Gleichung (2.27) Gebrauch machen, so erhalten wir

$$(\nabla^2 - p^2 \bar{\sigma}^2) \left( \nabla^2 - \frac{p}{\kappa} \right) \bar{\Phi} = -\frac{\bar{m}}{\kappa} \bar{Q}. \quad (2.28)$$

Wir wenden auf die letzte Gleichung die komplexe Fouriersche Integraltransformation an, die durch folgende Beziehungen gekennzeichnet ist

$$\begin{aligned} \bar{f}^*(\alpha_r, p) &= (2\pi)^{-3/2} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x_r, p) e^{i\alpha_k x_k} dV, \quad dV = dx_1 dx_2 dx_3 \\ \bar{f}(x_r, p) &= (2\pi)^{-3/2} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}^*(\alpha_r, p) e^{-i\alpha_k x_k} dW, \quad dW = d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Die Lösung der Gleichung (2.28) nimmt dann die Gestalt an

$$\bar{\Phi}(x_r, p) = -\frac{\bar{m}}{\kappa} (2\pi)^{-3/2} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{Q}^*(\alpha_r, p) e^{-i\alpha_k x_k} dW}{(\alpha_k \alpha_k + p/\kappa)(\alpha_k \alpha_k + p^2 \bar{\sigma}^2)}, \quad (2.30)$$

oder

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(x_r, p) &= -\frac{\bar{m} (2\pi)^{-3/2}}{p^2 \bar{\sigma}^2 - p/\kappa} \left\{ \frac{1}{\kappa} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{Q}^*(\alpha_r, p) e^{-i\alpha_k x_k} dW}{\alpha_k \alpha_k + p/\kappa} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\kappa} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{Q}^*(\alpha_r, p) e^{-i\alpha_k x_k} dW}{\alpha_k \alpha_k + p^2 \bar{\sigma}^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Das erste Integral in Klammern auf der rechten Seite der Gleichung (2.31) ist gleich  $\bar{T}$ ; es stellt gleichzeitig die Lösung der Gleichung (2.27) dar. Das zweite Integral kann man als Lösung der Differentialgleichung



$$\bar{S}_{,kk} - p^2 \bar{\sigma}^2 \bar{S} = -\frac{Q}{\kappa}, \quad S(x_r, 0) = \bar{S}(x_r, 0) = 0, \quad (2.32)$$

ansehen, die in ihrem Aufbau zur Gleichung (2.9) analog ist. So können wir also das allgemeine Integral der Gleichung (2.28) in der Form darstellen

$$\bar{\Phi}(x_r, p) = -\frac{Q}{p^2 \bar{\sigma}^2} \frac{m}{p/\kappa} (T - S). \quad (2.33)$$

Es sei hervorgehoben, daß zur Bestimmung der Funktion  $\bar{\Phi}$  die Kenntnis der Transformation der Funktion  $\bar{T}$  genügt; die Funktion  $S$  erhalten wir nämlich durch Ersetzen der Größe  $p/\kappa$  durch  $p^2 \bar{\sigma}^2$  in der transformierten  $\bar{T}$ . In dem besonderen Fall der momentan konzentrierten Wärmequelle, die im Ursprung des Koordinatensystems wirksam ist, haben wir

$$\bar{T} = \frac{Q}{4\pi\kappa R} e^{-R\sqrt{p/\kappa}}. \quad (2.34)$$

Folglich

$$\bar{\Phi} = -\frac{Qm}{4\pi\kappa R (p^2 \bar{\sigma}^2 - p/\kappa)} (e^{-R\sqrt{p/\kappa}} - e^{-R\sqrt{p\sigma}}). \quad (2.35)$$

Dieses Resultat erzielen wir auch, wenn wir von der Formel (2.17) Gebrauch machen und die vorgeschriebene Integration durchführen.

Untersuchen wir nun den zeitlich harmonischen Fall des veränderlichen Temperaturfeldes

$$T(x_r, t) = \operatorname{Re} [e^{i\omega t} \hat{T}(x_r)]. \quad (2.36)$$

Da die Verschiebungen und Spannungen sich gleichfalls der Zeit nach harmonisch ändern werden

$$u_i(x_r, t) = \operatorname{Re} [e^{i\omega t} \hat{u}_i(x_r)], \quad \sigma_{ij}(x_r, t) = \operatorname{Re} [e^{i\omega t} \hat{\sigma}_{ij}(x_r)], \quad (2.37)$$

so werden die Verschiebungsgleichungen die Form annehmen:

$$\hat{\mu} \hat{u}_{i,kk} + (\hat{\lambda} + \hat{\mu}) \hat{u}_{k,ki} = \hat{\gamma} \hat{T}_{,i} + \varrho (i\omega)^2 \hat{u}_i,$$

wo

$$\hat{\mu} = \frac{P_2(i\omega)}{2P_1(i\omega)}, \quad \hat{\lambda} = \frac{P_1(i\omega)P_4(i\omega) - P_2(i\omega)P_3(i\omega)}{3P_1(i\omega)P_3(i\omega)}, \quad \hat{\gamma} = (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})\alpha_i, \quad (2.38)$$

wenn in dem viskoelastischen Körper die Beziehungen (1.1) und (1.2) gelten, sowie

$$\hat{\mu}(i\omega) = i\omega \int_0^\infty a(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \hat{\lambda}(i\omega) = i\omega \int_0^\infty b(t) e^{-i\omega t} dt$$

im Falle des Biotschen viskoelastischen Körpers.

Daraus ist zu ersehen, daß wir die Spannungen und Verschiebungen durch die Formeln

$$u_i(x_r, t) = \operatorname{Re} [e^{i\omega t} \hat{\Phi}_{,i}] \quad (2.39)$$

$$\sigma_{ij}(x_r, t) = \operatorname{Re} \{e^{i\omega t} [2\hat{\mu}(\hat{\Phi}_{,ij} - \delta_{ij} \hat{\Phi}_{,kk}) + \varrho (i\omega)^2 \hat{\Phi}]\} \quad (2.40)$$

ausdrücken können.

Die Funktion  $\widehat{\Phi}$  erhalten wir, indem wir in die vorher für  $\overline{\Phi}$  entwickelten Formeln an Stelle des Laplaceschen Transformationsparameters  $p$  die Größe  $i\omega$  einsetzen. Wenn wir uns so der Formel (2.33) bedienen, erhalten wir

$$\widehat{\Phi} = - \frac{\overline{m}}{[(i\omega)^2 \sigma^2 (i\omega) - i\omega/x]} (\widehat{T} - \widehat{S}). \quad (2.41)$$

Die Funktion  $\widehat{S}$  ist das partikuläre Integral der Gleichung

$$\widehat{S}_{,kk} - (i\omega)^2 \sigma^2 \widehat{S} = - \frac{\widehat{Q}}{x} \quad (2.42)$$

### III. Beispiele zur Ausbreitung von Wärmespannungen im viskoelastischen Raum

#### A. Wärmeschock auf der Oberfläche des viskoelastischen Halbraumes

Das Problem der Ausbreitung von Spannungen, die durch plötzliche Erwärmung der den elastischen Halbraum begrenzenden Ebene hervorgerufen werden, ist von W. I. Danilowskaya<sup>18</sup> für ein vollkommen elastisches Medium gelöst worden.

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen  $T(0, t) = T_0 H(t)$  sowie der Anfangsbedingung  $T(x_1, 0) = 0$  können wir die Laplacesche Transformation der Temperatur durch die Formel

$$\overline{T} = \frac{T_0}{p} e^{-x_1 \sqrt{p/\kappa}}, \quad x_1 > 0 \quad (3.1)$$

ausdrücken.

Die Funktion  $\overline{\Phi}$  bestimmen wir aus der Formel (2.24). Nach Durchführung der vorgeschriebenen Integration haben wir

$$\overline{\Phi} = - \frac{T_0 \overline{m}}{p [p^2 \overline{\sigma}^2 - p/\kappa]} [e^{-x_1 \sqrt{p/\kappa}} - e^{-p \overline{\sigma} x_1}], \quad x_1 > 0. \quad (3.2)$$

Zu demselben Ergebnis gelangen wir, wenn wir uns der Formel (2.33) bedienen.

Bei dem erörterten Problem sind lediglich die Verschiebung  $u_1$  sowie die Normalspannungen von Null verschieden, wobei nach (2.10)

$$\overline{\sigma}_{11} = p^2 \overline{\rho} \overline{\Phi}, \quad \overline{\sigma}_{22} = \overline{\sigma}_{33} = 2 \overline{\mu} \overline{\Phi}_{,11} + \overline{\lambda} \overline{\Phi}_{,11} - \overline{\gamma} \overline{T} = 2 \overline{\mu} \overline{m} \overline{T} + \overline{\lambda} \overline{\sigma}^2 p^2 \overline{\Phi}. \quad (3.3)$$

Bestimmen wir nun die Wärmespannungen im Biotschen viskoelastischen Körper. Die in den Beziehungen (1.11) erscheinenden Funktionen  $a(t)$ ,  $b(t)$  nehmen wir in Form einer exponentiellen Abhängigkeit an

$$a(t) = \mu_0 e^{-\varepsilon t}, \quad b(t) = \lambda_0 e^{-\varepsilon t}. \quad (3.4)$$

Die Annahme derselben Relaxationszeit  $\varepsilon^{-1}$  für beide Funktionen, welche die rheologischen Eigenschaften eines Mediums charakterisiert, ist gleichbedeutend mit der Annahme eines von der Zeit unabhängigen Poissonschen Koeffizienten  $\overline{\nu}$ .

<sup>18</sup> W. I. Danilowskaya: „Wärmespannungen im elastischen Halbraum, verursacht durch plötzliche Erwärmung der Oberfläche (russisch), Prikl. Mat. i. Mech. 9,2 (1950).

In Übereinstimmung mit den Formeln (1.13) ist

$$\bar{\mu} = \mu_0 \frac{p}{p + \varepsilon}, \quad \bar{\lambda} = \lambda_0 \frac{p}{p + \varepsilon}, \quad (3.5)$$

und ferner

$$\bar{\gamma} = \gamma_0, \quad \bar{\sigma}^2 = \sigma_0^2 \frac{p + \varepsilon}{p}, \quad \sigma_0^2 = \frac{\varrho}{\lambda_0 + 2\mu_0}, \quad \gamma_0 = (3\lambda_0 + 2\mu_0)\alpha_t,$$

$$\bar{m} = m_0 = \gamma_0 \sigma_0^2 / \varrho.$$

Die Funktion  $\bar{\sigma}_{11} = \varrho p^2 \Phi$  nimmt die Form an

$$\bar{\sigma}_{11} = - \frac{T_0 m_0 \varrho}{\sigma_0^2 (p - \beta)} (e^{-x_1 \sqrt{p, \kappa}} - e^{-x_1 \sigma_0 \sqrt{p(p+\varepsilon)}}), \quad (3.6)$$

$$\beta = \frac{1}{\kappa \sigma_0^2} - \varepsilon > 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Führen wir auf Grund des Ausdrucks (3.6) eine inverse Laplace-Transformation durch und setzen die Bezeichnungen ein

$$\zeta = \frac{x_1}{\kappa \sigma_0}, \quad \tau = \frac{t}{\kappa \sigma_0^2}, \quad \alpha = \varepsilon \kappa \sigma_0^2 \quad (3.7)$$

so erhalten wir

$$\sigma_{11}(\zeta, \tau; \alpha) = - \frac{T_0 m_0 \varrho}{\sigma_0^2} [f_1(\zeta, \tau; \alpha) - g_1(\zeta, \tau; \alpha)] \quad (3.8)$$

wo

$$f_1(\zeta, \tau; \alpha) = \frac{1}{2} e^{\tau(1-\alpha)} \left[ e^{-\zeta \sqrt{1-\alpha}} \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau(1-\alpha)} \right) + e^{\zeta \sqrt{1-\alpha}} \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau(1-\alpha)} \right) \right]$$

$$g_1(\zeta, \tau; \alpha) = e^{\tau(1-\alpha)} \left[ e^{-\zeta \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right)} H(\tau - \zeta) + \right. \\ \left. + \zeta \frac{\alpha}{2} \int_0^\tau e^{-\eta(1-\alpha/2)} \frac{I_1 \left( \frac{\alpha}{2} \sqrt{\eta^2 - \zeta^2} \right)}{\sqrt{\eta^2 - \zeta^2}} H(\eta - \zeta) d\eta \right]. \quad (3.9)$$

Die verbliebenen Spannungen sind durch die Formeln gegeben.

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = -2\mu_0 m_0 T_0 f_2(\zeta, \tau; \alpha) + \frac{\lambda_0 \sigma_0^2}{\varrho} \sigma_{11}, \quad (3.10)$$

wo

$$f_2(\zeta, \tau; \alpha) = \frac{e^{-\alpha\tau}}{2} \left[ e^{-i\zeta \sqrt{\alpha}} \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} - i\sqrt{\alpha\tau} \right) + \right. \\ \left. + e^{i\zeta \sqrt{\alpha}} \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} + i\sqrt{\alpha\tau} \right) \right]. \quad (3.11)$$

Die zeitliche Veränderlichkeit der Spannung  $\sigma_{11}$  ist für  $\tau < \zeta$ , ( $t < x_1 \sigma_0$ ) durch die Funktion  $f_1(\zeta, \tau; \alpha)$  und für  $\tau > \zeta$  durch beide Funktionen  $f_1, g_1$  charakterisiert.



Die Funktion  $f_1(\zeta, \tau; \alpha)$  hat einen diffusen Charakter, die Funktion  $g_1(\zeta, \tau; \alpha)$  den Charakter einer Längswelle, deren Front sich mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c = 1/\sigma_0$  bewegt.

Für  $\tau = \zeta$  erhalten wir einen Sprung in der Spannung von endlichem Werte

$$\sigma_{11}(\zeta, \tau + ; \alpha) - \sigma_{11}(\zeta, \tau - ; \alpha) = \frac{T_0 m_0 \varrho}{\sigma_0^2} e^{-\frac{\alpha \zeta}{2}}, \quad (3.12)$$

der sich sowohl mit dem Parameter  $\alpha$  als auch mit der Entfernung  $\zeta$  verringert.

Für einen linear-elastischen Körper ( $\alpha \rightarrow 0$ ) ist dieser Sprung eine konstante Größe. Nach Passieren der Längswelle durch den Querschnitt  $\zeta$  verringert sich die Spannung in diesem Querschnitt schnell und strebt nach Null.

Man beachte weiter, daß für  $x_1 = 0$

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = -2 \mu_0 m_0 T_0 e^{-\alpha \tau} \quad (3.13)$$

ist.

Die Druckspannungen  $\sigma_{22}, \sigma_{33}$  sind von  $\alpha$  und  $\tau$  abhängig. Für  $\tau = 0$  nehmen sie den konstanten Wert  $-2 \mu_0 m_0 T_0$  zu, den wir im Falle eines vollkommen elastischen Körpers für  $\tau \neq 0$  erhalten.

Wenn auf dem Rande  $x_1 = 0$  eines viskoelastischen Halbraumes die Temperatur  $T(0, t) = T_0 \cos \sigma t$  vorgeschrieben wird, so ist das Temperaturfeld durch die Funktion

$$T(x_{11} t) = T_0 R e [e^{i\omega t - x_1 \sqrt{i\omega/\kappa}}], \quad x_1 > 0 \quad (3.14)$$

gegeben.

Wir berechnen ferner die Funktion  $\hat{\Phi}$ , indem wir uns der Formel (2.41) bedienen

$$\hat{\Phi} = \frac{\hat{m} T_0}{(i\omega)^2 \hat{\sigma}^2 - i\omega/\kappa} [e^{-x_1 \sqrt{i\omega/\kappa}} - e^{-x_1 \hat{\sigma} i\omega}]. \quad (3.15)$$

Für den Biotschen Körper erhalten wir unter Voraussetzung der Beziehungen (3.4)

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(i\omega) &= \int_0^\infty e^{-i\omega t} a(t) dt = \mu_0 \frac{1}{\varepsilon + i\omega}, \quad \hat{\lambda}(i\omega) = \lambda_0 \frac{1}{\varepsilon + i\omega}, \\ \hat{m} &= m_0, \quad \hat{\sigma}^2 = \sigma_0^2 \frac{i\omega + \varepsilon}{i\omega}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

Die Normalspannung  $\sigma_{11}$  erhalten wir aus der Formel

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(x_1, t) &= R e [\varrho e^{i\omega t} (i\omega)^2 \hat{\Phi}] \\ &= \frac{m_0 T_0 \varrho}{\sigma_0^2} R e \left\{ \frac{i\omega e^{i\omega t}}{i\omega - \beta} \left[ e^{-x_1 \sqrt{\frac{i\omega}{\kappa}}} - e^{-x_1 \sigma_0 \sqrt{i\omega(\varepsilon + i\omega)}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Die verbliebenen Normalspannungen sind durch die Formel

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{\lambda_0 \sigma_0^2}{\varrho} \sigma_{11} - 2 m_0 \mu_0 T_0 R e \left[ \frac{i\omega}{\varepsilon + i\omega} e^{i\omega t - x_1 \sqrt{i\omega/\kappa}} \right]. \quad (3.18)$$

gegeben.

B. Spannungsausbreitung, die in einem viskoelastischen Raum durch eine kontinuierliche Flächenwärmequelle hervorgerufen wird

Möge in der Ebene  $x_1 = 0$  die kontinuierliche Wärmequelle  $Q(x_1, t) = Q_0 \delta(x_1) H(t)$  wirksam sein. Die Laplace-Transformation des Temperaturfeldes hat hier die Form

$$\bar{T} = \frac{Q_0}{2p\sqrt{xp}} e^{-x_1\sqrt{p/\kappa}}, \quad x_1 > 0. \quad (3.19)$$

Ferner bestimmen wir die Funktion  $p^2 \bar{\Phi}$ , indem wir uns der Formel (2.33) bedienen.

$$p^2 \bar{\Phi} = -\frac{Q_0 \bar{m} p}{2\kappa [p^2 \bar{\sigma}^2 - p/\kappa]} \left[ \frac{e^{-x_1\sqrt{p/\kappa}}}{\sqrt{p/\kappa}} - \frac{e^{-x_1 p \bar{\sigma}}}{p \bar{\sigma}} \right]. \quad (3.20)$$

Für den viskoelastischen Biotschen Körper erhalten wir

$$\bar{\sigma}_{11} = p^2 \bar{\Phi} = -\frac{Q_0 m_0 \varrho}{2\kappa \sigma_0^2 (p - \beta)} \left[ \sqrt{\frac{\kappa}{p}} e^{-x_1\sqrt{p/\kappa}} - \frac{e^{-x_1 \sigma_0 \sqrt{p(p+\varepsilon)}}}{\sigma_0 \sqrt{p(p+\varepsilon)}} \right]. \quad (3.21)$$

Nach Durchführung der Rücktransformation auf Grund obiger Gleichung und Einführung der Bezeichnungen (3.7), finden wir, daß

$$\sigma_{11}(\zeta, \tau; \alpha) = -\frac{m_0 Q_0 \varrho}{2 \sigma_0} [f_4(\zeta, \tau; \alpha) - g(\zeta, \tau; \alpha)] \quad (3.22)$$

wo

$$f_4(\zeta, \tau; \alpha) = \frac{1}{2\sqrt{1-\alpha}} e^{\tau(1-\alpha)} \left[ e^{-\zeta\sqrt{1-\alpha}} \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau(1-\alpha)} \right) - e^{\zeta\sqrt{1-\alpha}} \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau(1-\alpha)} \right) \right] \quad (3.23)$$

$$g(\zeta, \tau; \alpha) = e^{\tau(1-\alpha)} \int_0^\tau e^{-\eta \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} I_0 \left( \frac{\alpha}{2} \sqrt{\eta^2 - \zeta^2} \right) d\eta \cdot H(\tau - \zeta).$$

Die Spannungen  $\sigma_{22}, \sigma_{33}$ , werden durch die Formel ausgedrückt

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = -m_0 \mu_0 Q_0 \sigma_0 f_5(\zeta, \tau; \alpha) + \frac{\lambda_0 \sigma_0^2}{\varrho} \sigma_{11}, \quad (3.24)$$

wo

$$f_5(\zeta, \tau; \alpha) = \frac{i e^{-\alpha\tau}}{2\sqrt{\alpha}} \left[ e^{i\zeta\sqrt{\alpha}} \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} + i\sqrt{\tau\alpha} \right) - e^{-i\zeta\sqrt{\alpha}} \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} - i\sqrt{\tau\alpha} \right) \right]. \quad (3.25)$$

C. Spannungsausbreitung, die in einem viskoelastischen Raum durch eine konzentrierte kontinuierliche Wärmequelle hervorgerufen wird

Es möge im Ursprung des Koordinatensystems eine konzentrierte kontinuierliche Wärmequelle  $Q(R_1, t) = Q_0 \delta(R) H(t)$  wirksam sein. Nach Einsetzen der Temperaturtransformierten

$$\bar{T}(R_1 p) = \frac{Q_0}{4 \pi R p} e^{-R \sqrt{p/\kappa}}, \quad R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad (3.26)$$

in die Formel (2.33) erhalten wir

$$\Phi = - \frac{Q_0 \bar{m}}{4 \pi \kappa R p (p^2 \sigma^2 - p/\kappa)} (e^{-R \sqrt{p/\kappa}} - e^{-R \sigma p}). \quad (3.27)$$

Die Spannungstransformierten sind durch die Formeln

$$\bar{\sigma}_{RR} = -4 \bar{\mu} R^{-1} \bar{\Phi}_{,R} + \varrho p^2 \bar{\Phi} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = \bar{\sigma}_{\theta\theta} &= -2 \bar{\mu} (\bar{\Phi}_{,RR} + R^{-1} \bar{\Phi}_{,R}) + \varrho p^2 \bar{\Phi} = \\ &= -\frac{1}{2} \bar{\sigma}_{RR} - 2 \bar{\mu} \bar{m} \bar{T} + \frac{1}{2} \frac{3 \bar{\lambda} + 2 \bar{\mu}}{\bar{\lambda} + 2 \bar{\mu}} \varrho p^2 \bar{\Phi}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

gegeben.

Es ist zu ersehen, daß für die Bestimmung der Spannungen die Kenntnis der Funktionen  $p^2 \bar{\Phi}$  sowie  $\bar{\mu} \bar{\Phi}_{,R}$  genügt.

Für den Biotschen viskoelastischen Körper ist

$$p^2 \bar{\Phi} = - \frac{A}{R(p - \beta)} (e^{-R \sqrt{p/\kappa}} - e^{-R \sigma_0 \sqrt{p(p+\varepsilon)}}), \quad \beta = \frac{1}{\kappa \sigma_0^2} - \varepsilon, \quad (3.30)$$

$$R^{-1} \bar{\mu} \bar{\Phi}_{,R} = \frac{A \mu_0}{R^3} \left[ \frac{e^{-R \sqrt{p/\kappa}} (1 + R \sqrt{p/\kappa})}{p(p - \beta)(p + \varepsilon)} - \frac{e^{-R \sigma_0 \sqrt{p(p+\varepsilon)}} (1 + R \sigma_0 \sqrt{p(p + \varepsilon)})}{p(p - \beta)(p + \varepsilon)} \right].$$

$$A = \frac{Q_0 m_0}{4 \pi \kappa \sigma_0^2}. \quad (3.31)$$

Wenn wir (3.30) und (3.31) in (3.28) einsetzen und die Rücktransformation vornehmen sowie die Bezeichnungen (3.7) einführen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \sigma_{RR}(\zeta, \tau; \alpha) &= - \frac{Q_0 m_0 \mu_0}{\pi \kappa^2 \sigma_0^2 \zeta^3} \left[ \frac{1}{1 - \alpha} (f_1 - f_3 - g_1 + g_3) + \right. \\ &+ \frac{1}{\alpha} (f_2 - f_3 - g_2 + g_3) + \zeta (f_4 - f_5 - g_4) + \vartheta \zeta^2 (f_1 - g_1) \left. \right], \quad \vartheta = \frac{\lambda_0 + 2 \mu_0}{4 \mu_0}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Hier sind die Funktionen  $f_1(\zeta, \tau; \alpha)$  und  $g_1(\zeta, \tau; \alpha)$  durch die Formeln (3.9), die Funktionen  $f_2(\zeta, \tau; \alpha)$  durch die Formel (3.11) gegeben, während die Funktionen  $f_4(\zeta, \tau; \alpha)$  und  $f_5(\zeta, \tau; \alpha)$  durch die Formeln (3.23) und (3.25) ausgedrückt sind.

Weiter ist

$$f_3(\zeta, \tau; \alpha) = \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2 \sqrt{\tau}} \right)$$

$$g_2(\zeta, \tau; \alpha) = e^{-\alpha \tau} \left[ e^{\frac{\alpha \zeta}{2}} H(\tau - \zeta) + \frac{\alpha \zeta}{2} \int_0^\tau e^{\frac{\eta \zeta}{2}} I_1 \left( \frac{\alpha}{2} \sqrt{\eta^2 - \zeta^2} \right) \frac{H(\eta - \zeta)}{\sqrt{\eta^2 - \zeta^2}} d\eta \right],$$



$$g_3(\zeta, \tau; \alpha) = e^{-\frac{\alpha\zeta}{2}} H(\tau - \zeta) + \frac{\alpha\zeta}{2} \int_0^\tau e^{-\frac{\eta\alpha}{2}} \frac{I_1\left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{\eta^2 - \zeta^2}\right)}{\sqrt{\eta^2 - \zeta^2}} H(\eta - \zeta) d\eta,$$

$$g_4(\zeta, \tau; \alpha) = \int_0^\tau e^{(1-\alpha)\tau-\eta} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) I_0\left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{\eta^2 - \zeta^2}\right) H(\eta - \zeta) d\eta. \quad (3.33)$$

Im Querschnitt  $\zeta = \text{const.}$  und für den Augenblick  $\tau = \zeta$  erhalten wir einen Spannungssprung  $\sigma_{11}$  von der Größe

$$\sigma_{RR}(\zeta, \tau + ; \alpha) - \sigma_{RR}(\zeta, \tau - ; \alpha) = \frac{Q_0 m_0 \varrho}{4 \pi \kappa^2 \sigma_0^3 \zeta} e^{-\frac{\alpha\zeta}{2}}. \quad (3.34)$$

Dieser Sprung verringert sich mit der Entfernung  $\zeta$  sowie mit der Zunahme des Parameters  $\alpha$ .

Für einen linear-elastischen Körper ( $\alpha \rightarrow 0$ ) ist dieser Sprung umgekehrt proportional zu  $\zeta$ .

Die verbliebenen Normalspannungen bestimmen wir aus der Formel (3.29). Nach Durchführung der Rücktransformation erhalten wir

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\vartheta\vartheta} = -\frac{1}{2} \sigma_{RR} - \frac{Q_0 \mu_0 m_0}{2 \pi \sigma_0 \kappa \zeta} [f_2(\zeta, \tau; \alpha) +$$

$$+ \vartheta_0 (f_1(\zeta, \tau; \alpha) - g_1(\zeta, \tau; \alpha)], \quad \vartheta_0 = \frac{3 \lambda_0 + 2 \mu_0}{4 \kappa \mu_0}. \quad (3.35)$$

Wenn in den Ausdrücken (3.32), (3.35) Grenzübergänge  $\alpha \rightarrow 0$  vorgenommen werden, so erhalten wir die bekannten Bezeichnungen für die Spannungen eines vollkommen elastischen Körpers. So nimmt beispielsweise die Spannung  $\sigma_{RR}(\zeta, \tau; \alpha)$  die Form an

$$\sigma_{RR}(\zeta, \tau; 0) = -\frac{Q_0 \mu_0 m_0}{\pi \kappa^2 \sigma_0 \zeta^3} \left\{ \frac{1}{2} e^\tau \left[ (1 + \zeta + \vartheta \zeta^2) e^{-\zeta} \right. \right.$$

$$\cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau}\right) + (1 - \zeta + \vartheta \zeta^2) e^\zeta \operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau}\right) \Big] -$$

$$- \left(1 + \tau - \frac{1}{2} \zeta^2\right) \operatorname{erfc}\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} + \zeta \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{4\tau}} -$$

$$\left. - [(1 + \zeta + \vartheta \zeta^2) e^{\tau-\zeta} - \tau - 1] H(\tau - \zeta) \right\}. \quad (3.36)$$

Die in diesem Abschnitt dargestellten Lösungen beziehen sich auf den Biotschen viskoelastischen Körper. Die Anwendung dieses Modells gestattete die Erzielung von Ergebnissen, die für eine Diskussion geeignet sind. Das ergibt sich aus seiner Sondereigenschaft, namentlich aus der Annahme, daß die Größe  $\nu$  konstant ist.

Für das Maxwellsche Modell, besonders aber für das Kelvinsche Modell erhält man Resultate von einer verhältnismäßig komplizierteren Struktur.

(Eingegangen am 3. Oktober 1960)

## Nichtthomogenitäts-Probleme im elastischen und vorplastischen Bereich

Von W. Olszak und J. Rychlewski, Warschau

Mit 5 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Gleichgewichtsprobleme in inhomogenen Medien werden nach einer „umgekehrten Methode“ untersucht: Es werden im voraus gegebene Spannungsfelder betrachtet und die zugehörige Inhomogenitätsverteilung ermittelt. Damit lassen sich Schlüsse auf den Zusammenhang zwischen der Veränderlichkeit der elastischen Eigenschaften und dem Spannungszustand ziehen und solche Verteilungen der elastischen Kenngrößen angeben, die zu gewünschten Spannungsfeldern führen.

In der vorliegenden Arbeit werden Gleichgewichtsprobleme eines deformierbaren Mediums untersucht, dessen elastische Eigenschaften von Punkt zu Punkt veränderlich sind. Ein solches Medium wird als elastisch nichtthomogen bezeichnet<sup>9</sup>. Die sonstigen Voraussetzungen sind diejenigen der klassischen (linearen) Elastizitätstheorie. Die Elastizitätstheorie des nichtthomogenen Mediums besitzt bereits ihre eigene, wenn auch nicht zu weit ausgebaute Literatur, auf deren Besprechung hier übrigens nicht näher eingegangen wird. Nur beispielsweise sollen etwa die Arbeiten von S. G. Michlin<sup>5a, 5b</sup>, D. I. Scherman<sup>11a, 11b, 11c</sup>, J. Nowinski und S. Turski<sup>7a, 7b</sup>, W. Olszak<sup>9a, 9b, 9c</sup>, J. Golecki<sup>1</sup>, Z. Kaczkowski<sup>3</sup>, P. P. Teodorescu und M. Predescu<sup>12a, 12b</sup>, genannt werden.

Es ist durchaus einleuchtend, daß die Berücksichtigung der nichtthomogenen Eigenschaften eines Mediums sogar die einfachsten Aufgaben der Elastizitätstheorie merklich erschweren muß. In der Tat nehmen z. B. die Laméschen oder die Beltrami-Michelschen Grundgleichungen in einem derartigen Fall eine überaus schwierige Form an<sup>7a</sup>, was die Notwendigkeit der Heranziehung von komplizierten mathematischen Hilfsmitteln nach sich zieht. Für das ebene Problem hat, wie es scheint, D. I. Scherman die bisher wohl allgemeinste Behandlungsweise vorgeschlagen<sup>11</sup>. Konkrete Aufgaben wurden nur ganz vereinzelt gelöst, vorwiegend für lineare und exponentielle Nichtthomogenitätstypen.

In der vorliegenden Arbeit wird die Anwendung einer „umgekehrten“ Methode vorgeschlagen: die Ermittlung der Nichtthomogenität (strenger: entsprechender Klassen der Nichtthomogenität) für im voraus gegebene Spannungsfelder.

Ein derartiges Vorgehen hat zweierlei Aspekte. Erstens gestattet es, verhältnismäßig einfach eine Reihe von Lösungen zu erzielen, wobei gleichzeitig gewisse Schlüsse über den Einfluß der Veränderlichkeit der elastischen Eigenschaften auf den Spannungszustand gezogen werden können. Zweitens können aber auch diejenigen Verteilungen der elastischen Kenngrößen ermittelt werden, die das Zustandekommen von vornherein geforderten und von bestimmten Gesichtspunkten aus bequemen oder interessanten Spannungsfeldern sichern.

Es mag noch hinzugefügt werden, daß man ebenfalls gemischte semi-inverse („halb-umgekehrte“) Verfahren vorschlagen kann, bei denen gewisse Elemente, die das Spannungsfeld, sowie andere, die das Nichtthomogenitätsfeld bestimmen, gesucht werden.

### 1. Ein elementares Beispiel

Das uns hauptsächlich interessierende Problem wird das ebene Elastizitätsproblem sein; bevor jedoch dasselbe in seiner allgemeinen Fassung formuliert wird, mag ein elementares Beispiel, und zwar jenes einer dickwandigen Kugelschale untersucht

werden. Dies soll eine Art Einführung bilden, wobei jedoch gleich vorweggenommen werden soll, daß darin bei weitem nicht alle später angetroffenen Motive und Elemente zu finden sein werden.

1.1. Es soll also eine dickwandige Kugel, die der Einwirkung eines Innendruckes  $p$  ausgesetzt ist, untersucht werden. Die elastische Nichtthomogenität dieser Kugel möge auf die Veränderlichkeit ihres Elastizitätsmoduls  $E$  entlang des Radius zurückgeführt werden. Die Erfassung der damit verbundenen Erscheinungen ermöglichen die nachstehenden Grundgleichungen; es sind dies die Gleichungen\*

der Statik 
$$\sigma_{r,r} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\psi, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi\psi} = \sigma_{r\psi} = 0; \quad (1.1)$$

der Geometrie 
$$\varepsilon_r = u_{,r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} u, \quad \varepsilon_{\varphi,r} + \frac{1}{r} (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r) = 0; \quad (1.2)$$

der Elastizität 
$$\begin{cases} \varepsilon_r = M (\sigma_r - 2\nu \sigma_\varphi), \\ \varepsilon_\varphi = M [\sigma_\varphi (1 - \nu) - \nu \sigma_r]; \end{cases} \quad M = \frac{1}{E}. \quad (1.3)$$

Die Randbedingungen werden in Spannungen definiert:

$$r = a, \quad \sigma_r = -p; \quad r = b, \quad \sigma_r = 0. \quad (1.4)$$

Wir formulieren nunmehr das folgende Problem:

Es sei ein Spannungszustand gegeben, der die Gleichgewichtsgleichung sowie die Randbedingungen befriedigt (ein „statisch zulässiges“ Spannungsfeld).

Es sollen diejenigen Funktionen  $M$  ermittelt werden, welche das tatsächliche Zustandekommen eines derartigen Zustandes herbeiführen (den geometrischen Zusammenhang des Körpers sicherstellen).

Werden die Beziehungen (1.3) in die Kompatibilitätsbedingung (1.2) eingesetzt, dann erhalten wir

$$M_{,r} [\sigma_\varphi (1 - \nu) - \nu \sigma_r] + M \left[ \sigma_{\varphi,r} (1 - \nu) - \nu \sigma_{r,r} + \frac{1}{r} (1 + \nu) (\sigma_\varphi - \sigma_r) \right] = 0. \quad (1.5)$$

Diese Gleichung bestimmt gerade die gesuchte Klasse der Nichtthomogenitätsfunktion. Es mag erwähnt werden, daß jede Lösung dieser Gleichung, die dem physikalischen Sinn der Funktion  $M$  nicht widerspricht, für uns annehmbar ist, denn wir schreiben für  $M$  keinerlei Randbedingungen vor.

Nach Integration finden wir

$$\ln |M| = -\ln |\sigma_\varphi (1 - \nu) - \nu \sigma_r| - \frac{1}{2} (1 + \nu) \int \frac{\sigma_{r,r} dr}{\sigma_\varphi (1 - \nu) - \nu \sigma_r} + C. \quad (1.6)$$

1.2. Als erstes statisch zulässiges Spannungsfeld ziehen wir die Lösung für eine homogene dickwandige Kugelschale heran:

$$\sigma_r = \tilde{p} \left( 1 - \frac{b^3}{r^3} \right), \quad \sigma_\varphi = \tilde{p} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{b^3}{r^3} \right), \quad \tilde{p} = p \frac{a^3}{b^3 - a^3}. \quad (1.7)$$

Gehen wir damit in die Gl. (1.5) ein, dann stellen wir fest, daß die einzige Lösung

$$M = \text{const}$$

lautet.

\* In der vorliegenden Arbeit wird die Differentiation durch Angabe der entsprechenden Veränderlichen hinter einem Beistrich bezeichnet. Die Summationskonvention wird nicht verwendet. (Ausnahme: Anmerkung\* von S. 136.)



Daraus folgt der Schluß, daß in einer Kugel kein Nichthomogenitätsfeld zu demselben Spannungszustand führen kann, der in einer homogenen Kugel herrscht. Diese Folgerung kann keineswegs als selbstverständlich angesehen werden und ihre Verallgemeinerung wäre entschieden als voreilig zu bezeichnen. Im Gegenteil, im ebenen Problem, wie wir es bald sehen werden, wird der Sachverhalt in der Regel ganz anders liegen; dort werden nämlich ganze umfangreiche Klassen von Nichthomogenitätsfunktionen existieren, die einem Spannungszustand zugeordnet sind, der derselbe ist, wie in einem homogenen Körper.

1.3. Untersuchen wir nunmehr ein statisch zulässiges Spannungsfeld, das das Postulat der Unveränderlichkeit der zweiten Invariante erfüllt

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (1.8)$$

Ein Feld dieser Art kann als Feld gleichmäßiger Anstrengung des Materials angesehen werden, wenn wir uns auf den Standpunkt der Gültigkeit der v. Misesschen Plastizitätsbedingung

$$J_2 = k^2$$

stellen.

Es ist leicht festzustellen, daß in unserem elementaren Beispiel sich nur ein einziges Feld von dieser geforderten Eigenschaft verwirklichen läßt (was aber im allgemeinen durchaus nicht der Fall ist) und zwar

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{p}{\ln \alpha} \cdot \ln \frac{b}{r}, \\ \sigma_\varphi &= \frac{p}{\ln \alpha} \cdot \left( \frac{1}{2} - \ln \frac{b}{r} \right), \quad \alpha = \frac{b}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Da

$$J_2 = \frac{1}{3} (\sigma_r - \sigma_\varphi)^2, \quad (1.10)$$

so erreicht die Kugel gleichzeitig überall den kritischen Zustand (übergeht also z. B. in den plastischen Zustand; man könnte sie deshalb etwa „isoplastisch“ nennen); es ist dabei

$$p = 2\sigma_s \ln \alpha, \quad \sigma_s = \sqrt{3k}.$$

Finden wir nun jene Nichthomogenität, die diesem Spannungsfeld entspricht. Indem wir (1.9) in (1.6) einsetzen, erhalten wir

$$|M| = |M_0| \cdot \left| 1 - \frac{1}{\eta} \ln \frac{b}{r} \right|^{-3\eta}, \quad \eta = \frac{1-\nu}{2(1-2\nu)}. \quad (1.11)$$

Auf Grund von physikalischen Erwägungen müssen wir verlangen, daß  $M > 0$  in  $\langle a, b \rangle$ . Der Punkt, in welchem  $M = 0$ , ist gegeben durch

$$r = b \cdot e^{-\eta};$$

demzufolge müssen wir verlangen

$$b e^{-\eta} < a \quad \text{oder} \quad b e^{-\eta} > b,$$

was in Anbetracht von  $\eta > 0$  die folgende einschränkende Bedingung ergibt

$$\alpha < e^\eta. \quad (1.12)$$

Die gesuchte Nichthomogenität erhält man schließlich in der Form

$$E = E_0 \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{\eta} \ln \frac{b}{r} \right\}^{3\eta} \quad (1.13)$$

Von Interesse scheint hier der inkompressible Körper zu sein; die entsprechende Lösung erhält man, indem der Übergang  $\nu \rightarrow 1/2$  vorgenommen wird:

$$E = E_0 \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left[ \left\{ 1 - \frac{1}{\eta} \ln \frac{b}{r} \right\}^{-\frac{\eta}{\ln \frac{b}{r}}} \right]^{-3 \ln \frac{b}{r}} = E_0 e^{-3 \ln \frac{b}{r}} = E_0 \frac{r^3}{b^3} \quad (1.14)$$

Diese Lösung führt zu derjenigen, die bereits in den Arbeiten von W. Olszak und W. Urbanowski<sup>10</sup> angegeben wurde.

Der zweite Grenzfall für  $\nu = 0$  führt auf

$$E = E_0 \left\{ 1 - 2 \ln \frac{b}{r} \right\}^{3/2} \quad (1.15)$$

Die entsprechenden Ergebnisse sind in Abb. 1 graphisch dargestellt.

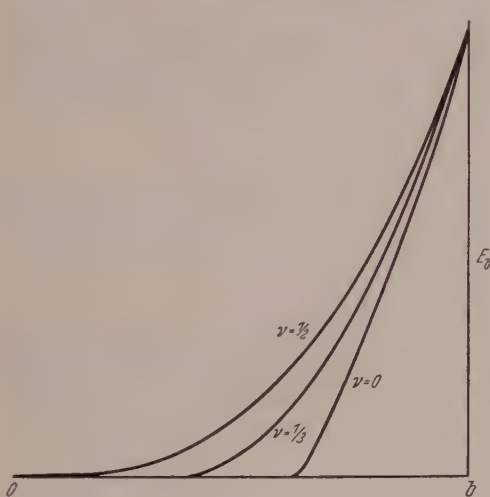


Abb. 1.

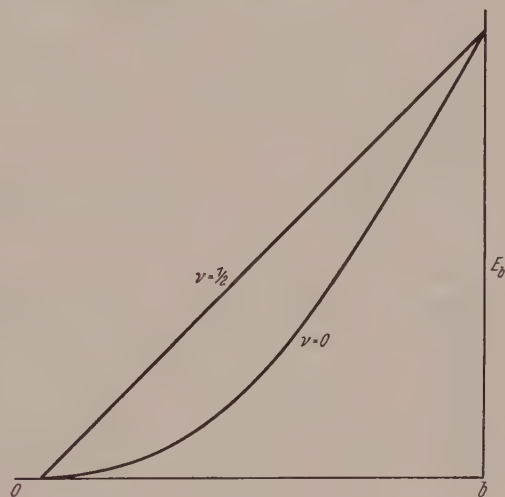


Abb. 2.

Es ist interessant festzustellen, daß ein qualitativer Unterschied zwischen einer nichtkompressiblen und einer kompressiblen Kugel besteht. Jede Kugel aus unzusammendrückbarem Material kann als eine Kugel gleicher Anstrengung im v. Misesschen Sinne projiziert werden, wohingegen zusammendrückbare Kugeln nur dann Kugeln gleicher Anstrengung sein können, wenn sie ausreichend „dünn“ sind (Bedingung (1.12)). Erst Kugeln mit  $\alpha < \sqrt{e}$  können diese Forderung (nach gleicher Anstrengung) bei beliebigem Wert für  $\nu$  erfüllen.

Ebenso leicht läßt sich eine derartige Verteilung von  $E$  finden, für die die entscheidende Spannung  $\sigma_\varphi$  konstant bleibt. Das einzige statisch zulässige Feld, das diese Bedingung erfüllt, ist gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\varphi &= \bar{p}, \\ \sigma_r &= -\bar{p} \left[ \frac{b^2}{r^2} - 1 \right], \quad \bar{p} = p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Nach Einsetzen dieser Ausdrücke (1.6) erhalten wir

$$E = E_0 \left( 1 + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{b^2}{r^2} \right)^{-\frac{1-\nu}{2\nu}} = E_1 \left[ (1-2\nu) + \nu \frac{b^2}{r^2} \right]^{-\frac{1-\nu}{2\nu}}, \quad (1.17)$$

wo  $E_0$ ,  $E$ , beliebige Konstanten bedeuten.

Die oben schon erwähnten Grenzfälle sind leicht zu finden; sie lauten

$$E_{\nu=1/2} = E_b \cdot \frac{r}{b}; \quad (1.18)$$

$$E_{\nu=0} = E_0 \lim_{\nu \rightarrow 0} \left\{ \left[ 1 + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{b^2}{r^2} \right]^{\frac{1-2\nu}{\nu} \cdot \frac{r^2}{b^2}} - \frac{1-\nu}{2(1-2\nu)} \frac{b^2}{r^2} \right\} = E_b \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{b^2}{r^2} - 1 \right)} \quad (1.19)$$

Die entsprechenden Diagramme sind in Abb. 2 dargestellt.

## 2. Grundgleichung des ebenen Problems

Wir betrachten das ebene Problem eines elastisch nichthomogenen Körpers unter der Annahme der Einwirkung von äußeren Belastungen mit gleichzeitiger Berücksichtigung des Auftretens von Massenkraften und der Einwirkung eines veränderlichen Temperaturfeldes.

Die elastischen Eigenschaften des isotopen Körpers in einem Punkt können bekanntlich durch zwei voneinander unabhängige Kenngrößen festgelegt werden. Für diese Zwecke kann je ein Paar der nachfolgenden Größen herangezogen werden:  $G$  (Gestaltungsäandersmodul),  $K$  (Volumsänderungsmodul),  $E$  (Youngscher Elastizitätsmodul),  $\nu$  (Poissonsche Querdrehungszahl).

Wir nehmen an, daß die beiden passend gewählten Moduli von den Koordinaten des betrachteten Punktes  $P$  abhängen, so daß also die elastische Nichthomogenität durch zwei unabhängige Funktionen charakterisiert wird. Setzen wir noch hinzu, daß die Nichthomogenität sowohl als „angeboren“, als auch außerdem als mit dem Temperaturfeld im Zusammenhang stehend auftreten kann, wie etwa

$$G = G[x, y, z, T(x, y, z)].$$

Die Grundgleichungen haben bekanntlich die Form:

$$\text{Statik} \quad \begin{cases} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + X = 0, \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + Y = 0; \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\text{Hookesches Gesetz} \quad \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \bar{M} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) + \bar{\varepsilon} \cdot \alpha \cdot T, \\ \varepsilon_{yy} = \bar{M} (\sigma_{yy} - \bar{\nu} \sigma_{xx}) + \varepsilon \cdot \alpha \cdot T, \\ \gamma_{xy} = \bar{M} (1 + \bar{\nu}) \sigma_{xy}, \end{cases} \quad \bar{M} = \frac{1}{E}; \quad (2.2)$$

Kompatibilitätsbedingung

$$\varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} - 2\gamma_{xy,xy} = 0, \quad (2.3)$$



Diese Gleichungen sind für die zwei hier möglichen Varianten zutreffend, und zwar für den ebenen Spannungszustand ( $e S z$ ), beziehungsweise für den ebenen Formänderungszustand ( $e F z$ ), wobei im Einklang mit unserem früheren Vorschlag<sup>9a</sup>.

$$\text{für } (e F z) \quad \bar{E} = \frac{E}{1 - \nu}, \quad \bar{\nu} = \frac{\nu}{1 - \nu}, \quad \bar{\varepsilon} = (1 + \nu); \quad (2.4)$$

$$\text{für } (e S z) \quad \bar{E} = E, \quad \bar{\nu} = \nu, \quad \varepsilon = 1. \quad (2.5)$$

Wir leiten nunmehr die grundlegende Gleichung des betrachteten Problems ab; diese ersetzt die biharmonische Gleichung, die bekanntlich den ebenen Fall des homogenen Körpers beherrscht. Wenn das Hookesche Gesetz in die Kompatibilitätsbedingung eingesetzt wird, erhalten wir

$$[(\bar{M} \sigma_{xx}),_{yy} + (\bar{M} \sigma_{yy}),_{xx} - 2(\bar{M} \sigma_{xy}),_{xy}] - [(\bar{M} \bar{\nu} \sigma_{yy}),_{yy} + (\bar{M} \bar{\nu} \sigma_{xx}),_{xx} + (2 \bar{M} \bar{\nu} \sigma_{xy}),_{xy}] + \nabla^2 (\bar{\varepsilon} \alpha T) = 0. \quad (2.6)$$

Nach Durchführung der Differentiationen der Produkte und nach gleichzeitiger Elimination der Ableitungen von  $\sigma_{xy}$ , die durch Heranziehung der Gleichgewichtsgleichung vorgenommen wird, kommen wir nach längeren Umformungen zu dem nachstehenden Resultat

$$\nabla^2 [\bar{M} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] - [\bar{N}_{,yy} \sigma_{yy} + \bar{N}_{,xx} \sigma_{xx} + 2 \bar{N}_{,xy} \sigma_{xy}] + \bar{N} (X_{,x} + Y_{,y}) + 2 (\bar{N}_{,x} X + \bar{N}_{,y} Y) + \nabla^2 (\bar{\varepsilon} \alpha T) = 0, \quad (2.7)$$

worin

$$\bar{N} = \bar{M} (1 + \bar{\nu}) = \frac{1}{2 \bar{G}}. \quad (2.8)$$

Diese Gleichung entspricht dem allgemeinsten Fall der Nichthomogenität, wenn beide Elastizitätsmoduli von der Lage des betrachteten Punktes und der Temperatur abhängen, wobei gleichzeitig beliebige Massenkräfte auftreten können. Wenn diese Massenkräfte ein Potential besitzen

$$X = -U_{,x}, \quad Y = -U_{,y}, \quad (2.9)$$

dann werden die Gleichgewichtsgleichungen bekanntlich identisch erfüllt, wenn

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \Omega_{,yy} + U, \\ \sigma_{yy} &= \Omega_{,xx} + U, \\ \sigma_{xy} &= -\Omega_{,xy}. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Die Gleichung (2.7) nimmt in diesem Fall die Gestalt an

$$\nabla^2 [\bar{M} \nabla^2 \Omega + (2 \bar{M} - \bar{N}) U + \bar{\varepsilon} \alpha T] - [\bar{N}_{,yy} \Omega_{,xx} + \bar{N}_{,xx} \Omega_{,yy} - 2 \bar{N}_{,xy} \Omega_{,xy}] = 0. \quad (2.11)$$

Der einfachere Fall, der Massenkräfte und Temperatureinwirkung übergeht, wurde von S.G. Michlin behandelt<sup>5a</sup>. Seine auf etwas weniger einfache Art abgeleitete Grundgleichung des Problems geht aus der unserigen durch Streichung jener Glieder hervor, die  $X$ ,  $Y$  und  $T$  enthalten.

Sind die Funktionen  $\bar{N}$ ,  $\bar{M}$ ,  $U$ ,  $T$  gegeben, so kann (2.11) als die verallgemeinerte Gleichung für die Airysche Spannungsfunktion  $\Omega$  angesehen werden. Die Bestimmung des Spannungszustandes verlangt daher die Lösung des entsprechenden Randwertproblems für diese Gleichung. Die Schwierigkeit dieser Aufgabenstellung ist offenbar und bei weitem größer, als diejenige, mit der wir es im Fall eines homogenen Körpers zu tun haben.

Eine bedeutende Vereinfachung wird erzielt, wenn der reziproke Gestaltsänderungsmodul konstant oder von den Koordinaten linear abhängig ist:

$$N = a_1 + a_2 x + a_3 y. \quad (2.12)$$

Alsdann finden wir sofort

$$\nabla^2 [\bar{M} \nabla^2 \Omega + (2\bar{M} - \bar{N}) U + \varepsilon \alpha T] = 0. \quad (2.13)$$

Die Betrachtung der verallgemeinerten Airyschen Gleichung (2.11) mit der gleichzeitigen Annahme von  $U \equiv T \equiv 0$  gestattet die interessante Feststellung, daß der M. Lévy'sche Satz über die Unabhängigkeit der Airyschen Spannungsfunktion von den elastischen Eigenschaften des Körpers (mit Randbedingungen ausgedrückt in Kräften), die bekanntlich spannungsoptische Untersuchungsmethoden grundsätzlich ermöglicht, seine Gültigkeit verliert. Bei der Suche nach einer Verallgemeinerung des Lévy'schen Satzes wird folgende Frage aktuell: Möge dasselbe ebene Problem mit den auf den Rändern gegebenen Kräften für zwei elastisch nichthomogene Körper vorliegen; welche Beziehungen müssen zwischen den Nichthomogenitätsfunktionen der zwei Körper bestehen, damit die Airyschen Spannungsfunktionen identisch werden? Die Antwort lautet: beide Paare der Nichthomogenitätsfunktionen (z. B.  $M_1$ ,  $N_1$  und  $M_2$ ,  $N_2$ ) müssen die Gleichung (2.11) befriedigen, wobei die Funktion  $\Omega$  gegeben ist. Auf diese Weise sind wir gleichsam auf natürliche Art zu dem „umgekehrten“ Problem gelangt; dieses soll nunmehr weiterhin Gegenstand unserer allgemeinen Betrachtungen sein.

### 3. Die Formulierung des umgekehrten Problems

3.1. Im weiteren Verlauf wird uns im besonderen Maße ein Sonderfall elastischer Nichthomogenität interessieren, und zwar derjenige, der gegeben ist durch

$$\bar{E} = \bar{E}(x, y), \quad \bar{\nu} = \text{const.} \quad (3.1)$$

Die Grundgleichung (2.7) kann für diesen Fall nunmehr in der Form

$$\begin{aligned} & \bar{M}_{,xx} [\sigma_{yy} - \bar{\nu} \sigma_{xx}] - \bar{M}_{,xy} \cdot 2(1 + \bar{\nu}) \sigma_{xy} + \bar{M}_{,yy} [\sigma_{xx} - \bar{\nu} \sigma_{yy}] + \\ & + \bar{M}_{,x} \cdot 2[(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})_{,x} + (1 + \bar{\nu}) X] + \bar{M}_{,y} \cdot 2[(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})_{,y} + (1 + \bar{\nu}) Y] + \\ & + \bar{M} [\nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + (1 + \bar{\nu}) (X_{,x} + Y_{,y})] + \bar{\varepsilon} \nabla^2 (\alpha T) = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

hingeschrieben werden.

Die Gleichung (3.2) wird weiterhin als jene Gleichung behandelt, aus der die Funktion  $\bar{M}$  bestimmt werden soll.

Derart gelangen wir weiterhin zu der folgenden Formulierung des umgekehrten Problems:

Es sei ein statisch zulässiges Spannungsfeld\* in einem Medium gegeben, das sich

\* Unter einem statisch zulässigen Spannungsfeld verstehen wir ein Feld  $\sigma_{ij}$ , das die Gleichgewichtsgleichungen  $\sigma_{ij,j} + X_i = 0$  und die Randbedingungen  $\sigma_{ij} l_j = T_i$  befriedigt.

unter der Einwirkung der auf dem Rande angreifenden Kräfte\*\*, der Massenkkräfte und des Temperaturfeldes befindet;

es soll die Klasse jener Funktionen  $\bar{M}$  gefunden werden, für welche das obige Spannungsfeld tatsächlich zutreffen wird.

Der physikalische Sinn der Gleichung (3.2), welcher einer derart ausgesprochenen Formulierung des obigen umgekehrten Problems entspricht, beruht darauf, daß  $\bar{M}$  so beschaffen sein muß, daß der geometrische Zusammenhang des Körpers erhalten bleibt.

Damit weiterhin die Lösung des obigen Problems einen physikalischen Sinn habe, müssen wir aus der Klasse der formalen Lösungen der Gleichung (3.2) diejenigen wählen, die folgende Bedingungen erfüllen:

1.  $\bar{M} > 0$  im abgeschlossenen Gebiet  $D$ , das von dem Körper eingenommen wird;
2.  $\bar{M} \neq \infty$ ,  $M \neq 0$ , in  $D$ ;
3.  $\bar{M}$  muß in  $D$  hinreichend klein sein, damit die auftretenden Formänderungen und Verschiebungen als klein angesehen werden können, so daß wir nicht aus dem Rahmen der linearen Elastizitätstheorie hinauszugehen brauchen.

Es sind für uns folglich jene Klassen von Lösungen der linearen nichtthomogenen partiellen Gleichungen zweiter Ordnung (mit veränderlichen Koeffizienten) von Interesse, die den Bedingungen 1 bis 3 Genüge leisten. Diese Klasse kann u. U. leer sein (wie etwa im Beispiel der Kugel, Bedingung (1.12)), im allgemeinen enthält sie aber unendlich viele Elemente.

Wir haben es hier mit einem in den Anwendungen äußerst seltenen Fall zu tun, in welchem uns die Lösung des Randwertproblems für die partielle Gleichung nicht interessiert (wir schreiben ja keinerlei Randbedingungen für  $\bar{M}$  vor), sondern die gesamte Unterklasse der möglichen Lösungen. Deshalb wird es uns stets darum zu tun sein, eine „allgemeine Lösung“ der Gleichung (3.2) zu finden, die durch beliebige Funktionen ausgedrückt wird. Es sei hier nebenbei bemerkt, daß uns in der Theorie der partiellen Gleichungen, die im Grunde genommen eine Theorie der Randwertprobleme von partiellen Gleichungen ist, solche Lösungen im allgemeinen kaum interessieren, da sie ja in der Regel für die Lösung von Randwertaufgaben nicht geeignet erscheinen (eine Ausnahme bildet wohl die d'Alembertsche Lösung des Saitenproblems).

Bei der Formulierung des umgekehrten Problems war von dem statisch zulässigen Spannungsfeld die Rede. Für jede Aufgabe gibt es im allgemeinen unendlich viele derartige Spannungsfelder. Für jedes von ihnen kann die entsprechende Klasse der Funktionen  $\bar{M}$  gesucht werden. Auf diesem Wege, den wir zusätzlich etwa dadurch noch modifizieren, daß wir nur einen Teil der Elemente, die das Spannungsfeld bestimmen, als gegeben betrachten (wenn wir also beispielsweise seine Form bis auf gewisse noch freistehende charakteristische Eigenschaften voraussetzen), können wir eine Reihe von Lösungen für einen Körper mit elastischer Nichtthomogenität von der Art (3.1) erwarten. Dies mag freilich gewisse Intuition erfordern, kann dann aber in rechnerischer Hinsicht zu bedeutenden Vereinfachungen führen.

\*\* Man kann offensichtlich auch ein allgemeiner gefaßtes Problem betrachten, und zwar ein solches, für welches die Randbedingungen in Verschiebungen oder in gemischter Form gegeben sind. Dies führt weiterhin jedoch im Rechnungsgang zu komplizierten Bedingungen in Integralform für die Funktion  $\bar{M}$ . Für Randbedingungen, die in Verschiebungen ausgedrückt sind, (möglicherweise auch für jene, die in gemischter Form vorliegen), ist es bequemer, das umgekehrte Problem in einer gänzlich verschiedenen Weise zu formulieren, und zwar in Anlehnung an die Laméschen Verschiebungsgleichungen, etwa in der Art, wie dies für einen elastisch nichtthomogenen Körper vom Typus (3.1) in der Arbeit<sup>7a</sup> gezeigt wurde.



In dem bereits angeführten elementaren Beispiel der dickwandigen Kugel haben wir aus der Klasse der statisch zulässigen Felder diejenigen gewählt, die gewisse zusätzliche Forderungen erfüllten (wie etwa die Unveränderlichkeit der zweiten Invariante oder die Unveränderlichkeit einer der Hauptspannungen). In analoger Weise kann auch hier vorgegangen werden; ein solches Verfahren könnte dann etwa als das Projektieren einer Konstruktion auf im vorhinein vorgegebene Spannungsfelder genannt werden.

Wir werden weiterhin auf einige Möglichkeiten hinweisen, die, wie es scheint, besondere Aufmerksamkeit verdienen.

1. Als statisch zulässiges Spannungsfeld wird ein Feld angenommen, das einer entsprechenden Lösung für einen homogenen Körper entnommen wurde. Wir gelangen derart zu Nichthomogenitätsklassen, für die der Unterschied zwischen der Lösung für einen nichthomogenen und einen homogenen Körper sich nur auf den Formänderungs- und Verschiebungszustand beschränkt.

2. Aus der Menge der statisch zulässigen Felder nehmen wir diejenigen, die das nachstehende Postulat erfüllen

$$J_2 \equiv f^2(x, y) \text{ in } D, \quad (3.3)$$

worin  $f(x, y)$  eine gegebene Funktion bedeutet.

Man kann insbesondere die Annahme  $J_2 \equiv \text{const}$  in  $D$  treffen. Aus der Plastizitätstheorie ist es bekannt, daß es Felder von dieser Eigenschaft möglicherweise gar nicht gibt, es kann eventuell nur eines existieren (siehe Kugel), aber es können ihrer auch mehrere geben. In den Beispielen für Felder mit diesen Eigenschaften können Spannungsfelder herangezogen werden, die jenen ähnlich sind, welche aus den Lösungen für einen ideal-plastischen Körper bekannt sind. Es sei daran erinnert, daß diese Lösungen für den ebenen Formänderungszustand ( $e F z$ ) unter Voraussetzung von Inkompressibilität erhalten wurden und daß dieselben nur in einem derartigen Fall dem Postulat (3.3) Genüge leisten.

3. Eine andere Möglichkeit bilden die statisch zulässigen Felder mit der folgenden Eigenschaft

$$\frac{J_2}{2G} \equiv g^2(x, y) \text{ in } D, \quad (3.4)$$

insbesondere

$$\frac{J_2}{2G} \equiv \text{const} \text{ in } D$$

(„konjugierte“ Nichthomogenität nach <sup>9b, 9c, 10a</sup>).

Die Frage des Vorhandenseins derartiger Felder bedarf in jedem konkreten Fall einer Diskussion. Die Suche nach Lösungen für  $\bar{M}$  ist hier schwieriger, weil die Grundgleichung für  $\bar{M}$  nicht mehr linear ist (die Spannungen hängen jetzt infolge des Postulates (3.4) von  $\bar{M}$  ab).

Die Zweckmäßigkeit einer Untersuchung der erwähnten Möglichkeiten 2 und 3 bedarf einer Erörterung. Wie bekannt, hat das v. Mises'sche Plastizitätskriterium die Form

$$J_2 = k^2. \quad (3.5)$$

Als Maß für die Materialanstrengung wird hier, wie ersichtlich, die gemittelte Schubspannung angenommen, wenn die physikalische Interpretation von  $J_2$  nach W. W. Nowozhilow<sup>8</sup> akzeptiert wird.

M. T. Huber, als auch später H. Hencky, haben als ein derartiges Maß eine andere Größe vorgeschlagen, nämlich die spezifische Gestaltsänderungsenergie:

$$\frac{J_2^2}{2G} = S^2. \quad (3.6)$$

Folglich kann als Funktion, die die plastischen Materialeigenschaften charakterisiert, entweder  $k$  oder  $S^*$  angenommen werden. Das Material wird derart durch insgesamt drei Funktionen beschrieben, also z. B. durch

$$E, G, k \text{ oder } E, G, S.$$

Möglich sind hier verschiedene Fälle der elastischen und plastischen Nichtthomogenität (vgl.<sup>9b, 9c</sup>). Wesentlich erscheint, daß die Definition des plastisch nichtthomogenen Materials im Sinne von v. Mises und im Sinne von Huber-Hencky sich nur für Körper mit  $G \equiv \text{const}$  (nicht unbedingt  $E \equiv \text{const}$ ) decken. Für die von uns untersuchte elastische Nichtthomogenität (3.1) sind somit diese Definitionen voneinander verschieden.

Daher handelt es sich bei den Feldern aus Punkt 2 mit

$$f(x, y) = \alpha k(x, y) \text{ in } D, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (3.7)$$

um Felder gleicher Anstrengung für ein elastisch und plastisch nichtthomogenes Material im v. Misesschen Sinne.

Analog repräsentieren die Felder aus Punkt 3 mit

$$g(x, y) = \beta \cdot S(x, y) \text{ in } D, \quad 0 < \beta < 1, \quad (3.8)$$

Felder gleicher Anstrengung für ein elastisch und plastisch nichtthomogenes Material nach Huber-Hencky.

Am Rande unseres Grundproblems dürfte es sich lohnen, hier einen interessanten Sachverhalt zu vermerken, der bereits auf die Plastizitätstheorie hinübergreift. Möge ein elastisch nichtthomogenes Material ( $G \neq \text{const}$ ) vorliegen, das aber im v. Mises-schen Sinne plastisch homogen, dabei ideal plastisch ist. Möge gleichzeitig ein statisch zulässiges Feld gleicher Anstrengung vorliegen

$$J_2 = \alpha k \text{ in } D, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (3.9)$$

das jedoch von demjenigen, welches für einen ideal plastischen Körper bei völliger Plastizierung auftritt, abweicht. Aus der Grundgleichung finden wir diejenige Funktion  $\bar{M}$ , die die Realisierung eines derartigen elastischen Zustandes gewährleistet. Bei einer weiteren Zunahme der Belastung, (die mit einem Parameter proportional anwachsen soll), gelangen wir schließlich zu  $\alpha = 1$ , wobei dem so entstandenen plastischen Feld voraussetzungsgemäß kein Fließmechanismus entspricht. Wie verhält sich die Konstruktion weiterhin? Es scheint, daß (auf der Plastizitätsfläche im Spannungsraum dargestellt) eine neutrale Umgruppierung der  $\sigma_{\alpha\beta}$  eintreten müßte, bis ein kinematisch möglicher Zustand erreicht wird. Eine ähnliche Frage kann für ein im Huber-Henckyschen Sinne plastisch homogenes Material aufgeworfen werden (wobei jedoch zu beachten bleibt, daß dieses im v. Misesschen Sinne nicht plastisch homogen zu sein braucht).

\* Wir gehen hier auf eine ausführlichere physikalische Diskussion betreffend die Überlegenheit des einen oder anderen Vorgehens nicht näher ein; es will uns vielmehr scheinen, daß diese Angelegenheit noch zusätzlicher Untersuchungen bedarf.

Für konkrete Konstruktionen und Belastungen können außer den Möglichkeiten 1—3 auch andere Spannungsfelder von Interesse sein (vgl. etwa die Bedingung aus 1.4 für die Kugel).

3.2. Ähnlich wie unter Punkt 3.1 kann ein umgekehrtes Problem für andere Arten der elastischen Nichthomogenität formuliert werden. Für alle Fälle muß jedoch die Form für eine der Funktionen, die die Nichthomogenität bestimmen, vorausgesetzt werden, denn wir verfügen ja nur über eine einzige Gleichung. Wie ersichtlich, nimmt damit die Reichhaltigkeit der Möglichkeiten ungemein zu.

Am einfachsten ist es, wenn die Nichthomogenität vom folgenden Typus ist

$$\bar{M} = \bar{M}(x, y), \quad \bar{N} = a_1 + a_2 x + a_3 y. \quad (3.10)$$

Alsdann haben wir aus (2.7) für  $\bar{M}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$  die Poissonsche Gleichung

$$\nabla^2 [\bar{M}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = -[\nabla^2(\bar{\varepsilon} \alpha T) + \bar{N}(X_{,x} + Y_{,y}) + 2(a_1 X + a_2 Y)]. \quad (3.11)$$

Wenn die Massenkraft ein Potential besitzen, dann erhalten wir aus (3.11) den folgenden Zusammenhang

$$\bar{M} = \frac{\Phi(x, y) + \bar{N} U - \bar{\varepsilon} \alpha T}{\nabla^2 \Omega + 2 U}, \quad (3.12)$$

worin  $\Phi$  eine beliebige harmonische Funktion in  $D$  bedeutet. Aus der auf diese Art bestimmten Klasse der Funktionen  $\bar{M}$  wird nur diejenige Unterklasse in Erwägung gezogen, die die Bedingungen 1, 2, 3 erfüllt, sowie der folgenden Bedingung 4 genügt:

$$\left. \begin{array}{ll} (e S z) & 0 < \bar{\nu} = \frac{\bar{N}}{\bar{M}} - 1 < \frac{1}{2} \\ (e F z) & 0 < \bar{\nu} = \frac{\bar{N}}{\bar{M}} - 1 < 1 \end{array} \right\} \text{ in } D.$$

Wir werden diesen und andere Fälle nicht eingehender untersuchen, indem wir uns auf (3.1) beschränken.

3.3. Es ist leicht ersichtlich, daß man auf ähnliche Weise auch Probleme, die nicht mehr eben sind, behandeln kann. Ein elementares Beispiel wurde in Punkt 1 erörtert. Als interessant mag etwa noch erwähnt werden, daß im allgemeinen Fall eines dreidimensionalen Körpers, für welchen die Randbedingungen in Spannungen ausgedrückt sind, der Reichtum an Funktionen, die die elastischen Nichthomogenitätstypen für den gegebenen Spannungszustand bestimmen, verringert wird. In einem solchen Fall stehen uns nämlich sechs Beltrami-Michellsche Gleichungen zur Verfügung<sup>7a</sup>, die zwei Nichthomogenitätsfunktionen bestimmen. Den Kern der Diskussion wird hier die Widerspruchslosigkeit dieses Systems bilden.

#### 4. Diskussion des Gleichungstypus (3.2)

Für statisch zulässige Spannungsfelder, die von  $\bar{M}$  unabhängig sind, ist die Gleichung (3.2) eine lineare Gleichung zweiter Ordnung. Es soll nunmehr der Typus dieser Gleichung untersucht werden, und zwar in Abhängigkeit vom Feld  $\sigma_{\alpha\beta}$ .

Über den Gleichungstypus (3.2) entscheidet das Zeichen der Diskriminante

$$\Delta = (1 + \bar{\nu})^2 \sigma_{xy}^2 - (\sigma_{yy} - \bar{\nu} \sigma_{xx})(\sigma_{xx} - \bar{\nu} \sigma_{yy}) = \bar{\nu}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 + (1 + \bar{\nu})(\sigma_{xx}^2 - \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx} \sigma_{yy}). \quad (4.1)$$



Es ist sofort ersichtlich, daß für Gebiete, in denen

$$\text{sign } \sigma_{xx} \neq \text{sign } \sigma_{yy},$$

die Gleichung (3.2) vom hyperbolischen Typus ist.

Wir drücken nunmehr die Diskriminante durch Invarianten des Spannungszustandes aus

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}), \\ T &= \frac{1}{\sqrt{6}} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \dots + 6 (\sigma_{xy}^2 + \dots)]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Der Rechnungsgang ist gesondert für die Zustände ( $e F z$ ) und ( $e S z$ ) vorzunehmen, denn in den Ausdrücken (4.2) tritt  $\sigma_{zz}$  auf.

Für den ebenen Formänderungszustand ( $e F z$ ) erhalten wir

$$\Delta = \frac{1}{(1 - \nu)^2} \left[ T^2 - 3 \left( \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \right)^2 \sigma^2 \right], \quad (4.3)$$

was man ebenfalls durch die Invarianten des Formänderungszustandes  $\varepsilon$ ,  $I$  (ebenso definiert wie in (4.2)) ausdrücken kann.

$$\Delta = \left( \frac{2E}{1 - \nu^2} \right)^2 [I^2 - 3\varepsilon^2]. \quad (4.4)$$

Für den ebenen Spannungszustand ( $e S z$ ) finden wir entsprechend

$$\Delta = (1 + \nu)^2 \cdot \left[ T^2 - 3 \frac{1 + \nu^3}{(1 + \nu)^3} \sigma^2 \right]; \quad (4.5)$$

$$\Delta = E^2 \cdot \left[ I^2 - 3 \frac{1 - \nu + \nu^2}{(1 - 2\nu)^2} \varepsilon^2 \right]. \quad (4.6)$$

Für einen hydrostatischen Zustand  $\sigma_{xy} = 0$ ,  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$  ist die Gleichung vom elliptischen Typus.

Für reinen Schub,  $\sigma_{xx} \equiv \sigma_{yy} = 0$ , ist die Gleichung vom hyperbolischen Typus.

Im allgemeinen Fall eines beliebigen Spannungsfeldes werden wir im allgemeinen sowohl hyperbolische als auch elliptische Gebiete haben, die durch parabolische Linien getrennt sind.

Wir schreiben die Gleichung der Charakteristiken für die Gleichung (3.2) in hyperbolischen Gebieten. Wir erhalten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(1 + \bar{\nu}) \sigma_{xy} \pm \sqrt{\Delta}}{\sigma_{yy} - \bar{\nu} \sigma_{xx}} \quad (4.7)$$

was man auch in der nachstehenden Form hinschreiben kann

$$y'^2 + \frac{2(1 + \bar{\nu}) \sigma_{xy}}{\sigma_{yy} - \bar{\nu} \sigma_{xx}} y' + \frac{\sigma_{xx} - \bar{\nu} \sigma_{yy}}{\sigma_{yy} - \bar{\nu} \sigma_{xx}} = 0. \quad (4.8)$$

Besonders interessant ist der Fall des ebenen Formänderungszustandes für ein inkompressibles Medium ( $\bar{\nu} = 1$ ).

Die Diskriminante beträgt

$$\Delta = 4 T^2 > 0; \quad (4.9)$$

folglich ist die Gleichung (3.2) hier immer von hyperbolischem Typus. Die Gleichung der Charakteristiken nimmt die Form an

$$y'^2 + \frac{4\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} - 1 = 0, \quad (4.10)$$

was unmittelbar zu dem interessanten Schluß führt, daß sich die Charakteristiken mit den Trajektorien der größten Schubspannungen decken.

## 5. Einige Lösungen in kartesischen Koordinaten

5.1. Betrachten wir einen Körper, der am Rande durch einen konstanten Normaldruck  $p$  belastet ist; Massenkkräfte sollen nicht vorhanden sein (Abb. 3a). Der hydrostatische Zustand bildet ein statisch zulässiges Spannungsfeld

$$\sigma_{xx} \equiv \sigma_{yy} = p, \quad \sigma_{xy} \equiv 0 \text{ in } D. \quad (5.1)$$

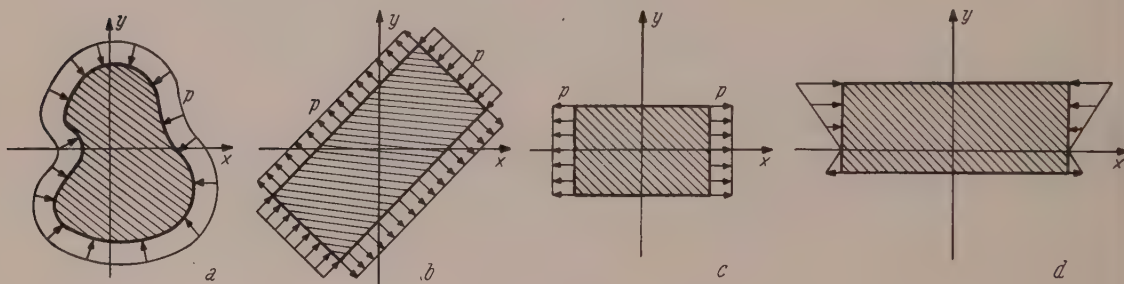


Abb. 3.

Wir untersuchen, für welche funktionelle Veränderlichkeit des Moduls  $E$  dieser Zustand tatsächlich zutreffen wird. Die Gl. (3.2) hat die Form

$$p(1 - \bar{\nu}) \nabla^2 \bar{M} + \bar{\varepsilon} \nabla^2 (\alpha T) = 0; \quad (5.2)$$

daher

$$\bar{M} = \Phi - \frac{\bar{\varepsilon}}{p(1 - \bar{\nu})} \alpha T, \quad (5.3)$$

worin  $\Phi$  eine beliebige harmonische Funktion in  $D$  ist.

Beim Fehlen von Temperatureinfluß oder wenn  $\nabla^2 (\alpha T) = 0$  (also z. B. für  $\alpha = \text{const}$  und quellenfreie Felder), kommen wir zu dem folgenden Ergebnis: in einem am Rande normal belasteten Körper (Normaldruck  $p$ ) wird der hydrostatische Zustand nur dann vorhanden sein, wenn  $\bar{M}$  eine harmonische Funktion ist. Aus dem Satz über max und min von harmonischen Funktionen geht hervor, daß die Werte max und min von  $\bar{E}$  auf die Körperberandung entfallen müssen; wenn also in irgendwelchem inneren Punkt der Wert  $\bar{E}$  größer oder kleiner als jeder der Randwerte sein wird, dann kann der hydrostatische Zustand nicht mehr realisiert werden und es treten zwangsläufig Schubspannungen auf. Aus dem Liouville'schen Satz und aus der Bedingung 2 für  $\bar{M}$  ergibt sich die Unmöglichkeit des Vorhandenseins eines hydrostatischen Zustandes im unbegrenzten Gebiet (bei einem veränderlichen  $\bar{E}$ ).

Eine Ausnahme bildet wiederum der ebene Formänderungszustand ( $eFz$ ) für einen inkompressiblen Körper. Die Gl. (5.2) ist für  $\bar{\nu} = 1$  für jede Funktion  $\bar{M}$  erfüllt, so daß also ein inkompressibles Medium [im ( $eFz$ ) Zustand] bei den oben angegebenen Bedingungen für beliebige Nichtthomogenitäten von Typus (3.1) sich in einem hydrostatischen Zustande befinden wird.

5.2. Möge der Körper so belastet sein, daß das statisch zulässige Feld ein Feld reinen Schubes sei

$$\sigma_{xy} \equiv \tau = \text{const}, \quad \sigma_{xx} \equiv \sigma_{yy} \equiv 0 \text{ in } D \quad (5.4)$$

(wie z. B. im Fall einer in zwei orthogonalen Richtungen durch die gleiche kontinuierliche Belastung gezogene und gedrückte Scheibe, Abb. 3b). Die Grundgleichung nimmt (bei Voraussetzung von verschwindenden Massenkraften, da sonst ein derartiger Zustand nicht möglich wäre), die Form an

$$\bar{M}_{,xy} + \frac{1}{\tau} \frac{\bar{\varepsilon}}{1 + \bar{\nu}} \nabla^2 (\alpha T) = 0; \quad (5.5)$$

daher

$$\bar{M} = \frac{\bar{\varepsilon}}{\tau (1 + \bar{\nu})} \cdot \iint \nabla^2 (\alpha T) dx dy + f(x) + g(y), \quad (5.6)$$

worin  $f$  und  $g$  beliebige Funktionen sind. Für  $\nabla^2 (\alpha T) = 0$  muß also die Fläche  $\bar{M}$  eine Translationsfläche in den Richtungen  $x, y$  sein, damit ein reiner Schubzustand zutrefte.

5.3. Nehmen wir den Fall des reinen Zuges (bzw. Druckes), wie auf Abb. 3c dargestellt, an [ $X \equiv Y \equiv A^2 (\alpha T) \equiv 0$ ].

Ein statisch zulässiges Spannungsfeld ist

$$\sigma_{xx} \equiv p = \text{const}, \quad \sigma_{yy} \equiv \sigma_{xy} \equiv 0 \text{ in } D. \quad (a)$$

Die Gleichung

$$-\bar{\nu} \bar{M}_{,xx} + \bar{M}_{,yy} = 0 \quad (b)$$

hat die allgemeine Lösung

$$\bar{M} = f(y + nx) + g(y - nx), \quad n = \frac{1}{\sqrt{\bar{\nu}}}, \quad (c)$$

$$\text{also z. B.} \quad \bar{M} = A + B \sin y \cos nx \quad (d)$$

(periodische Nichtthomogenität).

Es ist interessant, daß z. B. für eine Nichtthomogenität von der Art

$$\bar{M} = A x^3 + B x^2 + C x + D, \quad A \neq 0, \quad (e)$$

ein einachsiger Spannungszustand nicht mehr zutreffen kann (er wäre mit der Kompatibilitätsbedingung im Widerspruch).

5.4. Untersuchen wir weiterhin den Fall einer Biegung ohne Berücksichtigung von Massenkraften und Temperatureinfluß (vgl. etwa Abb. 3d).

Wir nehmen

$$\sigma_{xx} = A y, \quad \sigma_{yy} \equiv \sigma_{xy} \equiv 0 \text{ in } D. \quad (5.7)$$

Die Grundgleichung hat die Gestalt

$$-\bar{\nu} y \bar{M}_{,xx} + y \bar{M}_{,yy} + 2 \bar{M}_{,y} = 0. \quad (5.8)$$



Wir finden die Charakteristiken

$$\frac{dy}{dx} = \pm n, \quad y = \pm nx + A. \quad (5.9)$$

In den Koordinaten

$$\xi = y + nx, \quad \eta = y - nx \quad (5.10)$$

hat die Gleichung die kanonische Form

$$(\xi + \eta) \overline{M}_{,\xi\eta} + \overline{M}_{,\xi} + \overline{M}_{,\eta} = 0. \quad (5.11)$$

Die allgemeine Lösung folgt hier aus dem ersten Schritt der Kaskadenmethode nach Laplace<sup>13</sup>. Da die Invarianten Null werden,

$$h = k = -\frac{1}{(\xi + \eta)^2} + \frac{1}{(\xi + \eta)^2} = 0,$$

finden wir

$$\overline{M}_{1,\xi} + \frac{1}{\xi + \eta} \overline{M}_1, \text{ worin } \overline{M}_1 = \overline{M}_{,\eta} + \frac{1}{\xi + \eta} \overline{M}. \quad (5.12)$$

Indem der Reihe nach zwei gewöhnliche Gleichungen erster Ordnung gelöst werden, erhält man

$$\overline{M} = \frac{1}{\xi + \eta} [C_1(\xi) + C_2(\eta)] = \frac{1}{2y} \cdot [f(y + nx) + g(y - nx)]. \quad (5.13)$$

Folglich wird der Zustand (5.7) für einen nichthomogenen Körper von einer durch (5.13) bestimmten Nichthomogenität unter Erfüllung der Bedingungen 1) — 3) möglich sein.

Die Bedingung 1) verlangt, daß

$$\left. \begin{aligned} f(y + nx) + g(y - nx) &< 0 \text{ für } y < 0 \text{ in } D, \\ f(y + nx) + g(y - nx) &> 0 \text{ für } y > 0 \text{ in } D. \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Wenn die parabolische Linie  $y = 0$  innerhalb des Körpers liegt, so bereitet die Erfüllung der Bedingung 2) gewisse Schwierigkeiten. Wir verlangen, daß

$$\lim_{y \rightarrow 0} \overline{M} = \varphi(x), \quad 0 < \varphi(x) < \infty \text{ in } D. \quad (5.15)$$

Die Bedingung 3) kann stets befriedigt werden, weil  $M$  (5.8) bis auf eine Multiplikations-Konstante bestimmt erscheint.

All diesen Bedingungen genügt der Fall der Homogenität

$$f = \overline{M}_0 \cdot (y + nx), \quad g = \overline{M}_0 (y - nx), \quad \overline{M} = \overline{M}_0. \quad (5.16)$$

Ein anderes, weniger triviales Beispiel sei noch angeführt. Die Funktionen

$$\left. \begin{aligned} f &= A(y + nx) + B \sin(y + nx), \\ g &= A(y - nx) + B \sin(y - nx), \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

bei

$$A > 0, \quad A > B,$$

erfüllen alle Bedingungen und wir haben eine periodische Nichtthomogenität entlang  $x$ , wobei jene entlang  $y$  eine gedämpft periodische ist:

$$E = \left[ A + B \frac{\sin y}{y} \cos n x \right]^{-1}. \quad (5.18)$$

Wenn die Achse  $x$  nicht innerhalb des Körpers liegt (wie etwa für bestimmte Fälle von exzentrischem Zug oder Druck eines Balkens), bietet der Ausdruck (5.13) einen bedeutend größeren Reichtum an Möglichkeiten.

Es sei außerdem erwähnt, daß für den Fall, wenn die Nichtthomogenität von der Art  $M = M(x)$  ist, nur im Fall einer linearen Funktion der Zustand (5.7) ohne Verletzung des inneren Zusammenhanges Platz greifen kann.

Man kann endlich zu  $\bar{M}$  immer eine Konstante additiv hinzufügen, da die Gl. (5.8) linear und homogen ist und  $M = \text{const}$  eine Lösung darstellt.

5.5. Wir werden uns nunmehr mit dem in Abb. 4 dargestellten Staudamm befassen, der der Einwirkung seines Eigengewichts und eines hydrostatischen Druckes ausgesetzt ist.

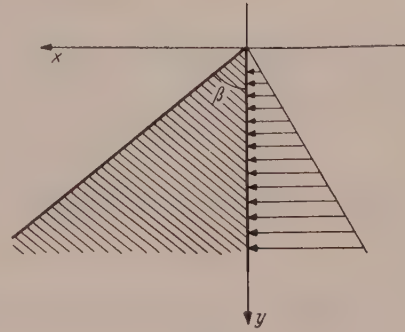


Abb. 4.

Für einen homogenen Staudamm kennen wir die Lösung von M. Lévy

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\gamma y, \\ \sigma_{yy} &= c(p - 2c^2\gamma)x + (\gamma c^2 - p)y, \\ \sigma_{xy} &= -\gamma c^2 x; \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

darin bedeuten

$\gamma$  = Gewicht (pro Volumeinheit) des Staudammes,

$p$  = Gewicht (pro Volumeinheit) der Flüssigkeit,

$c = \text{ctg } \beta$ .

Wir stellen uns die Aufgabe, jene Nichtthomogenitätsklassen  $\bar{M}$  zu finden, für die der Spannungszustand wieder derselbe ist (5.20). Indem wir in (3.2) die Ausdrücke (5.20) und

$$X \equiv 0, \quad Y \equiv p = \text{const} \quad (5.20)$$

einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} & [c(p - 2\gamma c^2)x + (\gamma c^2 + \bar{\nu}\gamma - p)y] M_{,xx} + 2[(1 + \bar{\nu})\gamma c^2 x] M_{,xy} + \\ & + [-\bar{\nu}c(p - 2\gamma c^2)x - (\gamma + \bar{\nu}\gamma c^2 - \bar{\nu}p)y] M_{,yy} + 2c(p - 2\gamma c^2) M_{,x} + \\ & + 2(\gamma c^2 - \gamma + \bar{\nu}p) M_{,y} = 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Die Diskriminante beträgt

$$\begin{aligned} \Delta &= x^2 [\gamma^2 c^4 (1 + \bar{\nu})^2 + \bar{\nu} c^2 (p - 2\gamma c^2)^2] + xy \{c(p - 2\gamma c^2) [\gamma(1 + \bar{\nu}^2) + \\ & + 2\bar{\nu}(\gamma c^2 - p)]\} + y^2 (\gamma c^2 + \gamma \bar{\nu} - p)(\gamma + \gamma \bar{\nu} c^2 - \bar{\nu}p). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Die Gleichung

$$\Delta = 0$$

ist eine quadratische Gleichung bezüglich  $\frac{x}{y}$ ; es stellt somit der geometrische Ort der etwaigen Parabolittspunkte von (5.21) stets zwei durch den Gipfel des Staudamms führenden Geraden dar.

Das Auffinden einer allgemeinen Lösung der Gl. (5.21), bildet eine äußerst schwierige Aufgabe. Untersuchen wir gewisse Sonderfälle.

a) Derart kann etwa die folgende Frage gestellt werden: Gibt es eine lineare Nicht-homogenität (außer  $\bar{M} = \text{const}$ )

$$\bar{M} = C_1 x + C_2 y + C_3, \quad (5.23)$$

die den Spannungszustand (5.20) nicht stört?

Indem wir (5.23) in (5.21) einsetzen, erhalten wir den Zusammenhang

$$c(p - 2\gamma c^2)C_1 + (c^2\gamma + \bar{\nu}p - \gamma)C_2 = 0; \quad (5.24)$$

folglich stellt die nachstehende Klasse  $\bar{M}$  die Antwort auf unsere Frage dar:

$$\bar{M} = A[(c^2\gamma + \bar{\nu}p - \gamma)x + c(p - 2c^2\gamma)y] + B; \quad (5.25)$$

sie ist gekennzeichnet durch dieselbe Richtung des Gradienten, der auf Grund der Belastung und der Geometrie des Staudammes eindeutig festgelegt ist.

Wir haben hier eine Sonderlösung für  $\bar{M}$  bei einem allgemeinen Fall der Belastung erzielt. Für gewisse Sonderbedingungen betreffend die Belastung, ist es leicht, allgemeine Lösungen für  $\bar{M}$  zu finden.

b) Möge ein derartiger Fall vorliegen, für den das Verhältnis der spezifischen Gewichte

$$p = 2c^2\gamma \quad (5.26)$$

betrage.

Versuchen wir nunmehr die Grundgleichung mittels Übergangs zur kanonischen Form zu lösen. Dies verlangt die Lösung der Charakteristikengleichung (4.7), wobei aus (5.22)

$$\Delta = [(1 + \bar{\nu})^2 c^4 x^2 + (\bar{\nu} - c^2)(1 - \bar{\nu}c^2)y^2] \geq 0 \quad (5.27)$$

folgt.

Es ist ersichtlich, daß man Lösungen in geschlossener Form in zwei Fällen erwarten kann, für welche

$$c^2 = \bar{\nu} \text{ oder } c^2 = \frac{1}{\bar{\nu}}.$$

$c^2 = \bar{\nu}$ . Für  $(eFz)$  haben wir für verschiedene  $\bar{\nu}$

$$\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \frac{p}{\gamma} < 2.$$

Die Grundgleichung hat die Form

$$2c^2 x M_{,xy} - (1 - \bar{\nu}^2)y M_{,yy} + 2(\bar{\nu} + 1)(2\bar{\nu} - 1)M_{,y} = 0. \quad (5.28)$$

Man sieht sofort, daß die Lösung eine beliebige additive Funktion von  $x$  enthält. Das hat seine Ursache in der getroffenen Vereinfachung, die in der Tat auf  $\varepsilon_{yy} = 0$  zurückgeht.

Aus der Gleichung der Charakteristiken

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(1 + \bar{\nu})\bar{\nu}x \pm \sqrt{\Delta}}{(\bar{\nu}c^2 - 1)y} \quad (5.29)$$



finden wir

$$x = A, \quad x = B \cdot y^{\frac{2\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}}.$$

Indem wir uns der Transformation

$$\xi = x, \quad \eta = x y^{\frac{2\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}} \quad (5.30)$$

bedienen, gelangen wir zur kanonischen Form der Gl. (5.28)

$$\bar{M}_{,\xi\eta} + \frac{3\bar{\nu}-1}{2\bar{\nu}} \cdot \frac{1}{\xi} \bar{M}_{,\eta} = 0, \quad (5.31)$$

die unmittelbar integriert werden kann. Derart finden wir endgültig

$$\bar{M} = \varphi(x) + \frac{1}{3\bar{\nu}-1} \psi(xy^{\frac{2\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}}). \quad (5.32)$$

Ähnlich wie in 5.4, ist die Beschränktheit auf der Parabolitätslinie  $x = 0$  zu gewährleisten.

Die Integration von Gl. (5.28) hätte man auch anders durchführen können: durch Integrieren bezüglich  $y$  und durch nachfolgende Lösung der partiellen Gleichung erster Ordnung.

$c^2 = 1/\bar{\nu}$ . Wir haben für  $(eSz)$

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{4}, \quad 2 < \frac{p}{\gamma} < \infty.$$

Die Grundgleichung lautet nunmehr

$$(\bar{\nu} - 1) y \bar{M}_{,xx} + 2 x \bar{M}_{,xy} + 2 \bar{M}_{,y} = 0; \quad (5.33)$$

die Charakteristiken sind gegeben durch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \pm \sqrt{A}}{(\bar{\nu} - 1) y}, \quad y = c, \quad \frac{\bar{\nu} - 1}{2} y^2 = x^2 + c. \quad (5.34)$$

Indem eingesetzt wird

$$\xi = y, \quad \eta = x^2 + \frac{1 - \bar{\nu}}{2} y^2, \quad (5.35)$$

findet man

$$\bar{M}_{,\xi\eta} + \frac{1}{2\eta - (1 - \bar{\nu})\xi^2} \bar{M}_{,\xi} = 0, \quad (5.36)$$

was schließlich

$$\bar{M} = \psi(\eta) + \int \frac{\varphi(\xi) d\nu}{[2\eta - (1 - \bar{\nu})\xi^2]^{1/2}} \quad (5.37)$$

ergibt.

Eine interessante Unterklasse bildet

$$\bar{M} = \bar{M}_0 + \psi\left(x^2 + \frac{1 - \bar{\nu}}{2} y^2\right) \quad (5.38)$$

(die Linien vom konstanten  $E$  sind Ellipsen mit dem Mittelpunkt in  $(0,0)$ ).

c) Es ist leicht, eine allgemeine Lösung für  $\gamma = 0$ , zu finden, d. h. für eine Gewichtstaumauer ohne äußere Belastung. In diesem Fall

$$\sigma_{yy} = p(c x - y), \quad \sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0. \quad (5.39)$$

Die Grundgleichung lautet jetzt

$$(c x - y) \bar{M}_{,xx} - \bar{\nu} (c x - y) M_{,yy} + 2 c \bar{M}_{,x} + 2 \bar{\nu} \bar{M}_{,y} = 0; \quad (5.40)$$

die Charakteristiken sind gegeben durch

$$y = \pm \sqrt{\bar{\nu}} x + B. \quad (5.41)$$

Durch Übergang zu neuen Veränderlichen

$$\xi = n y + x, \quad \eta = n y - x, \quad (5.42)$$

gelangen wir zur kanonischen Form der Gleichung (5.40)

$$\bar{M}_{,\xi\eta} + \frac{a}{b\xi + a\eta} \bar{M}_{,\xi} + \frac{b}{b\xi + a\eta} \bar{M}_{,\eta} = 0. \quad (5.43)$$

Bei Anwendung der Laplaceschen Umformung (13) (es gilt  $h = 0$ ) erhalten wir

$$M_{1,\xi} + \frac{b}{b\xi + a\eta} M_1 = 0, \text{ worin } M_1 = \bar{M}_{,\eta} + \frac{a}{b\xi + a\eta} \bar{M}. \quad (5.44)$$

Indem der Reihe nach zwei gewöhnliche Gleichungen der ersten Ordnung integriert werden, gelangt man endgültig zu

$$\bar{M} = \frac{1}{c x - y} \cdot [\varphi(n y + x) + \psi(n y - x)]. \quad (5.45)$$

Für die Parabolitätslinie, die nunmehr mit der Berandung  $y = c x$  zusammenfällt, müssen Einschränkungen ähnlicher Art, wie in 5.4, gemacht werden.

## 6. Einige Lösungen in polaren Koordinaten

6.1. Die Grundgleichung für die Funktion  $\bar{M}$  in polaren Koordinaten wird erhalten, wenn vom Hookeschen Gesetz und von der Kompatibilitätsgleichung ausgegangen wird

$$\varepsilon_{\varphi,rr} + \frac{1}{r^2} \varepsilon_{r,\varphi\varphi} - \frac{1}{r} \gamma_{r\varphi,r\varphi} + \frac{2}{r} \varepsilon_{\varphi,r} - \frac{1}{r} \varepsilon_{r,r} - \frac{1}{r} \varepsilon_{\varphi,r} - \frac{1}{r^2} \gamma_{r\varphi,\varphi} = 0. \quad (6.1)$$

Es ist jedoch bequemer, die entsprechende Transformation der bereits in kartesischen Koordinaten abgeleiteten Gleichung vorzunehmen.

Für den Fall, daß Temperatureinfluß und Massenkkräfte nicht vorhanden sind — und nur mit einem derartigen Fall wollen wir uns hier weiterhin befassen — liefert die Transformation von (2.11) das folgende Ergebnis

$$\begin{aligned} \nabla^2 (\bar{M} \nabla^2 \Omega) - (1 + \bar{\nu}) \left\{ \bar{M}_{,rr} \left[ \frac{1}{r} \Omega_{,r} + \frac{1}{r^2} \Omega_{,\varphi\varphi} \right] + \right. \\ \left. + \left[ \frac{1}{r} \bar{M}_{,r} + \frac{1}{r^2} \bar{M}_{,\varphi\varphi} \right] \Omega_{,rr} - 2 \left[ \frac{1}{r} \bar{M}_{,\varphi} \right]_{,r} \left[ \frac{1}{r} \Omega_{,\varphi} \right]_{,r} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (6.2)$$

was bequemer in der folgenden Fassung dargestellt werden kann

$$(\sigma_\varphi - \bar{\nu} \sigma_r) M_{,rr} - 2 \sigma_{r\varphi} \left( \frac{1}{r} \bar{M}_{,\varphi} \right)_{,r} + (\sigma_r - \bar{\nu} \sigma_\varphi) \left( \frac{1}{r} \bar{M}_{,r} + \frac{1}{r^2} \bar{M}_{,\varphi\varphi} \right) + \\ + 2 (\sigma_r + \sigma_\varphi)_{,r} \bar{M}_{,r} + 2 (\sigma_r + \sigma_\varphi)_{,\varphi} \cdot \frac{1}{r^2} \bar{M}_{,\varphi} + [V^2 (\sigma_r + \sigma_\varphi)] \cdot \bar{M} = 0. \quad (6.3)$$

6.2. Betrachten wir das nachstehende Spannungsfeld

$$\sigma_r = A \frac{f(\varphi)}{r}, \quad \sigma_\varphi \equiv \sigma_{r\varphi} \equiv 0. \quad (6.4)$$

Dieses Feld wird ein statisch zulässiges sein, wenn der untersuchte Körper entsprechenden Randbedingungen unterworfen ist, da die Gleichgewichtsbedingungen für eine beliebige Funktion  $f$  bereits befriedigt erscheinen.

Die Grundgleichung (6.3) hat die folgende Gestalt

$$-\bar{\nu} r^2 \bar{M}_{,rr} + \bar{M}_{,\varphi\varphi} - r \bar{M}_{,r} + 2 \frac{f'}{f} \bar{M}_{,\varphi} + \left[ 1 + \frac{f''}{f} \right] \bar{M} = 0 \quad (6.5)$$

und stellt eine hyperbolische Gleichung mit wirklichen Charakteristiken dar

$$\varphi \pm n \ln r = C. \quad (6.6)$$

Die Gleichung (6.5) wird durch Trennung der Variablen integriert; derart suchen wir jene Unterklassen der Lösungen für  $\bar{M}$ , die sich in der Form

$$\bar{M} = R(r) \cdot \Phi(\varphi) \quad (6.7)$$

darstellen lassen.

Nach Einsetzen dieses Ausdrucks in (6.5), erhalten wir zwei gewöhnliche Gleichungen

$$\bar{\nu} r^2 R'' + r R' - \lambda R = 0, \quad (6.8)$$

$$\Phi'' + 2 \frac{f'}{f} \Phi' + \left[ \frac{f''}{f} + (1 - \lambda) \right] \Phi = 0, \quad (6.9)$$

worin  $\lambda$  eine beliebige Konstante bedeutet.

Die Gleichung (6.8) stellt die bekannte Eulersche Gleichung dar, deren Lösung folgendermaßen lautet

$$R(r) = \begin{cases} c_1 r^\alpha + c_2 r^\beta, & \lambda > -\frac{(1-\bar{\nu})^2}{4\bar{\nu}}; \\ r^\alpha (c_1 + c_2 \ln r), & \lambda = -\frac{(1-\bar{\nu})^2}{4\bar{\nu}}; \\ r^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \left[ C_1 \cos \left( \frac{\alpha-\beta}{2i} \ln r \right) + C_2 \sin \left( \frac{\alpha-\beta}{2i} \ln r \right) \right], & \lambda < -\frac{(1-\bar{\nu})^2}{4\bar{\nu}}; \end{cases} \quad (6.10)$$

wo

$$\alpha, \beta = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1-\bar{\nu}}{\bar{\nu}} \pm \sqrt{\left( \frac{1-\bar{\nu}}{\bar{\nu}} \right)^2 + \frac{4\lambda}{\bar{\nu}}} \right]. \quad (6.11)$$

Die Gleichung (6.9) ist unter Angabe der Funktion  $f(\varphi)$  zu integrieren. Wir werden hier wiederum zwei beliebige Konstanten haben.



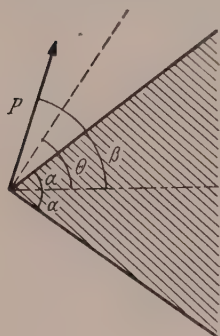
Derart fanden wir die Unterklasse der Funktion  $\bar{M}$ , wobei darin fünf beliebige Parameter auftreten. In konkreten Fällen wird der Veränderlichkeitsbereich dieser Parameter durch die Bedingungen 1 bis 3 reguliert.

Man kann den Sonderfall  $\lambda = 0$  betrachten; alsdann erhalten wir

$$\bar{M} = \left[ C_1 r^{-\frac{1-\nu}{\nu}} + C_2 \right] \cdot \left[ C_3 \int \frac{d\varphi}{f^2} + C_4 \right] \quad (6.12)$$

(vier beliebige Parameter).

6.3. Der im Gipfel belastete Keil. Die Lösung für einen homogenen Keil ist wohl bekannt und ist von der Art (6.4), wobei



$$A = -P \left[ \frac{\cos^2 \beta}{B_1^2} + \frac{\sin^2 \beta}{B_2^2} \right], \quad B_{1,2} = \frac{1}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha),$$

$$f(\varphi) = \cos(\varphi - \theta), \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{B_1}{B_2} \operatorname{tg} \beta; \quad (6.13)$$

die verwendeten Bezeichnungen sind aus Abb. 5 ersichtlich.

Die Gleichung (6.9) nimmt jetzt die Form an

$$\Phi'' - 2 \operatorname{tg}(\varphi - \theta) \Phi' - \lambda \Phi = 0; \quad (6.14)$$

Abb. 5.

diese kann integriert werden und führt auf

$$\Phi = \begin{cases} \frac{1}{\cos(\varphi - \theta)} [C_1 \cos k(\varphi - \theta) + C_2 \sin k(\varphi - \theta)], & k^2 = 1 - \lambda > 0; \\ \frac{1}{\cos(\varphi - \theta)} [C_1 \operatorname{ch} k(\varphi - \theta) + C_2 \operatorname{sh} k(\varphi - \theta)], & -k^2 = 1 - \lambda < 0. \end{cases} \quad (6.15)$$

Indem wir außerdem die Befriedigung der Bedingungen 1 bis 3 fordern, erhalten wir eine umfangreiche fünf-parametrische Klasse  $M = R \cdot \Phi$ , worin  $R$  und  $\Phi$  durch (6.10) und (6.15) gegeben sind; die Eigenschaft, daß die Verteilung der Spannungen die gleiche ist, wie in dem homogenen Keil, bleibt gewahrt.

Eine engere Unterklasse wird erhalten, indem  $\lambda = 0$  angenommen wird:

$$M = \left[ C_1 r^{-\frac{1-\nu}{\nu}} + C_2 \right] \cdot [C_3 \operatorname{tg}(\varphi - \theta) + C_4]. \quad (6.16)$$

Die Singularität  $r = 0$  kann aus plausiblen Gründen zugelassen werden, wenn jedoch für eine gegebene Konfiguration und eine vorgeschriebene Belastung des Keiles  $\varphi - \theta = \frac{\pi}{2}$  möglich ist (wie etwa für das Boussinesqsche Problem für die Halbebene), dann müssen wir  $C_4 = 0$  setzen.

6.4. Wir wollen noch an die Möglichkeit gewisser gemischter Fassungen anknüpfen, von denen in der Einleitung schon die Rede war.

Möge z. B. das Spannungsfeld von der Art (6.4) sein, wo  $f(\varphi)$  eine unbekannte Funktion, während die Nichthomogenität vom Typus (6.7) ist und wo  $\Phi(\varphi)$  als bekannt vorausgesetzt wird. Als dann ist die Gleichung (6.9) eine Gleichung, die  $f$  bestimmt:

$$f'' + 2 \frac{\Phi'}{\Phi} f' + \left[ \frac{\Phi''}{\Phi} + (1 - \lambda) \right] f = 0, \quad (6.17)$$

während (6.8), wie vorher, die Funktion  $R$  bestimmt. Indem wir (6.17) integrieren und die Bedingungen für die Konstanten erfüllen (im Fall des Keiles sind es Integralbedingungen des Gleichgewichts), gelangen wir zu dem gesuchten Spannungszustand.

Für  $\Phi = \text{const}$  haben wir

$$= \begin{cases} C_1 \operatorname{ch} \varphi \sqrt{\lambda - 1} + C_2 \operatorname{sh} \varphi \sqrt{\lambda - 1}, & \lambda > 1; \\ C_1 + C_2 \varphi, & \lambda = 1; \\ C_1 \cos \varphi \sqrt{1 - \lambda} + C_2 \sin \varphi \sqrt{1 - \lambda}, & \lambda < 1. \end{cases} \quad (6.18)$$

Ein interessantes Beispiel erhalten wir z. B. für einen Keil mit axialer Kraft ( $\beta = 0$ ; für  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  finden wir den Übergang zum Boussinesqschen Problem), indem wir  $\lambda = 1$ ,  $C_2 = 0$  einsetzen. Die Konstante  $C_1 A = B$  bestimmen wir aus der Bedingung

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{B}{r} r \cos \varphi d\varphi = P, \quad B = \frac{P}{2 \sin \alpha}. \quad (6.19)$$

In dem untersuchten Keil, der durch die Nichtthomogenität

$$\bar{M} = C_1 r^\alpha + C_2 r^\beta \quad (6.20)$$

gekennzeichnet ist (die Steifigkeit wächst mit  $r$  an), liegt der interessante Sachverhalt vor, daß die radiale Spannung vom Winkel  $\varphi$  unabhängig ist. Darin betragen  $\alpha = 1$ ,

$\beta = -\frac{1}{\nu}$  (berechnet aus (6.11) für  $\lambda = 1$ ).

#### Literatur

<sup>1</sup> J. Golecki: On the foundations of the theory of elasticity of plane incompressible non-homogeneous bodies. Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity, Proc. IUTAM Symposium, Warsaw, Ed. W. Olszak, Pergamon-Press, London — New York 1959.

<sup>2</sup> H. Hencky: Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen, Proc. Ist. Int. Congr. Appl. Mech., Delft 1924, 312—317; Z. ang. Math. Mech. 1924, 323—324.

<sup>3</sup> Z. Kaczkowski: Statics of non-homogeneous rectangular plates and discs. Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity, Proc. IUTAM Symposium, Warsaw, Ed. W. Olszak, Pergamon-Press, London—New York 1959.

<sup>4</sup> A. E. H. Love: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed., New York 1944.

<sup>5</sup> S. G. Michlin: a) Das ebene Problem der Elastizitätstheorie, Tr. Sejsmol. Inst., 1935, Nr. 65. b) Das ebene elastische Problem des nichtthomogenen Mediums, Tr. Sejsmol. Inst., 1935, Nr. 66.

<sup>6</sup> R. v. Mises: Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand, Gött. Nachr. math.-phys. Kl., 1913, 582—593.

<sup>7</sup> J. Nowinski und S. Turski: a) Aus der Elastizitätstheorie nichtthomogener, isotroper Körper, Arch. Mech. Stos. 1953, Nr. 1, 67—88; b) Studien über Spannungszustände in elastischen nichtthomogenen Körpern, Arch. Mech. Stos. 1953, Nr. 3, 397—414.

<sup>8</sup> W. W. Nowozhilow: Über den physikalischen Sinn der in der Plastizitätstheorie verwendeten Spannungsinvarianten, Prikl. Math. Mekh., 1952, Nr. 5.

<sup>9</sup> W. Olszak: a) Der ebene Formänderungszustand und Spannungszustand der Elastizitätstheorie, Ztschr. Österr. Ing.- u. Arch.-Verein 1936, Nr. 15/16, 90–92.; b) Über die Grundlagen der Theorie von nichthomogenen elastisch-plastischen Medien (I), Arch. Mech. Stos. 1954, Nr. 3, 493–532; c) Fundamentals of the theory of non-homogeneous elastic-plastic bodies, Bull. Acad. Pol. Sci. 1955, Nr. 2, 3.

<sup>10</sup> W. Olszak und W. Urbanowski: a) Die elastisch-plastische dickwandige Kugelschale aus nichthomogenem Material, die innerem und äußerem Druck ausgesetzt ist, Rozpr. Inz. 1956, Nr. 1, 23–41. b) Non-homogeneous thick-walled elastic-plastic spherical shell subjected to internal and external pressures, Bull. Acad. Pol. Sci. 1956, Nr. 3, 165–171; c) Plastic non-homogeneity: A survey of theoretical and experimental research, Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity, Proc. of the IUTAM Symposium Warsaw, Ed. W. Olszak, Pergamon-Press, London-New York 1959.

<sup>11</sup> D. I. Scherman: a) Das ebene statische Problem der Elastizitätstheorie für nichthomogene isotrope Medien, Tr. Sejsmol. Inst. 1938, Nr. 86.; b) Der ebene Formänderungszustand des nicht-homogenen isotropen Mediums, Prikl. Math. Melch. 1943, Nr. 7; c) On the problem of plane strain in non-homogeneous media. Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity, IUTAM Symposium, Warsaw, Ed. W. Olszak, Pergamon-Press, London–New York 1959.

<sup>12</sup> P. P. Teodorescu et M. Predeleanu: a) Quelques considérations sur le problème des corps élastiques hétérogènes. Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity, Proc. IUTAM Symposium, Warsaw, Ed. W. Olszak, Pergamon-Press, London–New York 1959; b) Über das ebene Problem nichthomogener elastischer Körper, Acta Techn. Hung. 1959.

<sup>13</sup> F. G. Tricomi: Lezioni sulle equazioni a derivate parziali, Torino 1954.

(Eingegangen am 10. November 1960.)

## Linearization in Visco-Plasticity\*

By William Prager, Providence, R. I.

**Summary.** A linearization in the theory of visco-plastic solids is discussed. A typical boundary value problem is formulated, and the uniqueness of its solution is investigated. An example is given.

### I. Introduction

The analysis of stresses in visco plastic bodies is usually based on the model of the incompressible Bingham solid<sup>1</sup>. When the stress is below a certain threshold, which is supposed to be specified by the yield condition of von Mises<sup>2</sup>, this solid is rigid. In the theory of perfectly plastic solids, the quadratic yield condition of von Mises is often approximated by a piecewise linear yield condition to simplify the analysis of boundary value problems. The present paper discusses an analogous linearization in the theory of visco plastic solids. A typical boundary value problem is formulated, and the uniqueness of its solution is investigated. The bending of a circular sandwich plate is treated as an example.

### II. Constitutive Equations

Using rectangular Cartesian coordinates  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), denote the stress components by  $\sigma_{ij}$  and the components of the rate of deformation (velocity strain) by  $\epsilon_{ij}$ . Since only incompressible visco-plastic materials are to be considered,

\* The results presented in this paper were obtained in the course of research sponsored by the Office Naval Research under Contract Nonr 562 (10).

<sup>1</sup> E. C. Bingham: Fluidity and Plasticity, McGraw-Hill, New York, 1922, pp. 215–218.

<sup>2</sup> R. v. Mises: Göttinger Nachrichten, math.-phys. Klasse, 1913, pp. 582–592 (1913).



The mean pressure

$$\varepsilon_{ii} = 0. \quad (1)$$

$$p = -\frac{1}{3} \sigma_{ii} \quad (2)$$

must then be regarded as a reaction to the constraint (1), and the constitutive equation involves the stress deviation

$$s_{ij} = \sigma_{ij} + p \delta_{ij} \quad (3)$$

rather than the full stress tensor  $\sigma_{ij}$ .

For general types of stress and rate of deformation, the constitutive equation of the Bingham solid was first given by Hohenemser and Prager<sup>3</sup>; it will here be written in a form (see<sup>4</sup>) that is readily linearized. Denoting the yield stress in simple shear by  $k$ , introduce the yield function

$$F = (s_{pq} s_{qp})^{1/2} - k \quad (4)$$

in which symmetric components of the stress deviation, for instance  $s_{12}$  and  $s_{21}$ , are to be formally treated as independent variables. Note that  $F$  is symmetric with respect to symmetric components of the stress deviation.

Since the stress deviation is completely specified by the stress tensor, the yield function may also be considered as a function of the stress components. As is readily verified,

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{s_{ij}}{(s_{pq} s_{qp})^{1/2}} \quad (5)$$

Consider now the constitutive equation

$$2\mu \varepsilon_{ij} = \langle F \rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (6)$$

in which  $\mu$  is a coefficient of viscosity and the symbol  $\langle F \rangle$  is defined as follows:

$$\langle F \rangle = \begin{cases} 0 & \text{for } F \leq 0, \\ F & \text{for } F > 0. \end{cases} \quad (7)$$

For simple shear with the shearing stress  $\tau$  and the (technical) shear strain  $\gamma$ , the constitutive equation (6) reduces to

$$\mu \gamma = \langle |\tau| - k \rangle \frac{\tau}{|\tau|}, \quad (8)$$

which is the constitutive equation of a Bingham solid in simple shear. The relation (6) can therefore be accepted as a suitable generalization of this constitutive equation to arbitrary types of stress and strain.

Use of the non-linear constitutive equation (6) greatly complicates the solution of technically interesting boundary value problems. Piecewise linear approximations to the constitutive equation (6) can be obtained as follows. According to (6), viscoplastic flow can only occur if

<sup>3</sup> K. Hohenemser and W. Prager: *Zeitschrift f. angew. Math. u. Mech.* 12, pp. 216—226 (1932), Eq. (2') on p. 224.

<sup>4</sup> W. Prager, *Mécanique des Solides Isotropes au delà du Domaine Elastique*, *Mémorial des Sciences Math.*, Fasc. 87, Gauthier-Villars, Paris, 1937, Eq. (47) on p. 27.

$$F > 0. \quad (9)$$

This flow condition, which has the form of a single non-linear inequality, is now approximated by the set of  $m$  linear inequalities

$$L_{(v)} \equiv \alpha_{pq}^{(v)} s_{pq} - \beta^{(v)} > 0, \quad (v = 1, 2, \dots, m), \quad (10)$$

in which the symmetric deviators  $\alpha_{pq}^{(v)}$  and the scalars  $\beta^{(v)}$  are independent of the state of stress. Through a suitable choice of these deviators and scalars and of the number  $m$ , the flow condition (10) can be made to approximate (9) with any desired degree of accuracy. Finally, the constitutive equation (6) is replaced by

$$2\mu \varepsilon_{ij} = \sum_{v=1}^m \langle L_{(v)} \rangle \frac{\partial L_{(v)}}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (11)$$

Since  $\alpha_{pq}^{(v)}$  is a deviator,  $\alpha_{pp}^{(v)} = 0$ , and it follows from (10) that

$$\frac{\partial L_{(v)}}{\partial \sigma_{ij}} = \alpha_{ij}^{(v)}. \quad (12)$$

The constitutive equation (11) can therefore be written in the form

$$2\mu \varepsilon_{ij} = \sum_{v=1}^m \langle L_{(v)} \rangle \alpha_{ij}^{(v)}. \quad (13)$$

### III. Boundary Value Problem

Consider a visco-plastic body occupying the three-dimensional region  $V$  with the regular surface  $S$ . Denote by  $F_i$  the body force per unit volume, by  $T_i$  the surface traction, and by  $v_i$  the surface velocity, and let these vectors be prescribed as follows:  $F_i$  throughout  $V$ ,  $T_i$  on the part  $S_T$  of  $S$ , and  $v_i$  on the remainder  $S_V$ . For simplicity, it will be assumed that neither  $S_T \equiv S$  nor  $S_V \equiv S$ . From the data mentioned above, the velocity field  $v_i(x)$  and the stress field  $\sigma_{ij}(x)$  are to be determined throughout  $V$  under the assumption that all inertia effects can be neglected.

The differential equations and boundary conditions of this problem are as follows. Since inertia effects are to be neglected, the stress field satisfies the equations of equilibrium; these are

$$\partial_i \sigma_{ij} + F_j = 0 \text{ in } V \quad (14)$$

and

$$n_i \sigma_{ij} = T_j \text{ on } S_T, \quad (15)$$

where the operator  $\partial_i$  denotes differentiation with respect to  $x_i$  and  $n_i$  is the unit vector along the exterior normal of  $S$ . Moreover, at each point of  $V$  the stress is related to the rate of deformation by means of the constitutive equation of the considered visco-plastic solid. Finally, the field of the rate of deformation is obtained from the velocity field by means of

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i v_j + \partial_j v_i), \quad (16)$$

where the velocity vector  $v_i$  assumes the given values on  $S_V$ . On account of the incompressibility of the considered solids,

$$\varepsilon_{ii} = \partial_i v_i = 0. \quad (17)$$

A stress field  $\sigma_{ij}$ , a velocity field  $v_i$  and the associated field of the rate of deformation that satisfy all these conditions will be said to constitute a solution of the considered boundary value problem.

For the constitutive equation (6), the uniqueness of the solution of this boundary value problem was investigated in an earlier paper<sup>5</sup>. The results obtained there will now be extended to the constitutive equation (13).

Assuming that the boundary value problem admits two solutions, let these be denoted by  $\sigma'_{ij}$ ,  $v'_i$ ,  $\varepsilon'_{ij}$  and  $\sigma''_{ij}$ ,  $v''_i$ ,  $\varepsilon''_{ij}$ . In view of (14), (16) and (17) it is readily verified that

$$\int n_i (\sigma'_{ij} - \sigma''_{ij}) (v'_j - v''_j) dS = \int (s'_{ij} - s''_{ij}) (\varepsilon'_{ij} - \varepsilon''_{ij}) dV. \quad (18)$$

The left side of (18) vanishes since  $n_i \sigma'_{ij} = n_i \sigma''_{ij}$  on  $S_T$  and  $v'_i = v''_i$  on  $S_V$ . The integral on the right of (18) must therefore vanish. On the other hand, it will be shown that the integrand is positive unless  $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon''_{ij}$ . In this way, the uniqueness of the rate of deformation will be established.

On account of (13), the integrand on the right of (18) is proportional to

$$I = \sum_{v=1}^m (s'_{ij} - s''_{ij}) (\langle L'_{(v)} \rangle - \langle L''_{(v)} \rangle) \alpha_{ij}^{(v)} \quad (19)$$

the factor of proportionality,  $1/(2\mu)$ , being positive. With the use of (10), the expression (19) for  $I$  may be rewritten as

$$I = \sum_{v=1}^m (L'_{(v)} - L''_{(v)}) (\langle L'_{(v)} \rangle - \langle L''_{(v)} \rangle). \quad (20)$$

In the discussion of the sign of  $I$ , three types of region must be distinguished:

a) where both solutions correspond to rigid behavior ( $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon''_{ij} = 0$ ) no  $L''_{(v)}$  or  $L'_{(v)}$  is positive, and  $I$  vanishes;

b) where one solution, say that indicated by the double prime, corresponds to rigid behavior and the other to visco-plastic flow, at least one  $L'_{(v)}$  but no  $L''_{(v)}$  is positive, and

$$I = \sum_{v=1}^m (L'_{(v)} - L''_{(v)}) \langle L'_{(v)} \rangle \quad (21)$$

is positive;

c) finally, where both solutions correspond to visco-plastic flow, some  $L'_{(v)}$  and some  $L''_{(v)}$  are positive, and  $I$  as given by (20) is found to be positive, unless  $L'_{(v)} = L''_{(v)}$  for each  $v = 1, 2, \dots, m$ ; in this case, however,  $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon''_{ij}$  by (13).

The integrand on the right of (18) thus is non-negative and vanishes only where  $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon''_{ij}$ . Since, on the other hand, the integral on the right of (18) must vanish, the field of the rate of deformation is unique. The velocity field is therefore unique to within the velocity field of a rigid-body motion, and the superposition of such a velocity field is as a rule precluded by the boundary conditions on  $S_V$ . The stress field, however, need not be unique, though the corresponding scalar field  $L_{(v)}$  will be uniquely determined throughout the region of visco-plastic flow ( $\varepsilon_{ij} \neq 0$ ).

<sup>5</sup> W. Prager: Studies in Mathematics and Mechanics Presented to Richard von Mises, Academic Press, New York, 1954, pp. 208-216.



## IV. Example

For brevity, the preceding discussion has been restricted to three-dimensional visco-plastic continua. The results are however readily generalized to visco-plastic structures, in which the states of stress and rate of deformation are specified by a number of generalized stresses and the associated generalized strain rates (see for instance<sup>6</sup>, p. 35 ff.). As an example, let us treat the bending of a circular visco-plastic sandwich plate of the radius  $R$  that is simply supported along its entire edge and carries a uniformly distributed transverse load of the intensity  $p$ . The generalized stresses are the radial bending moment  $M_r$  and the circumferential bending moment  $M_\theta$ . The associated generalized strain rates are the rates of radial and circumferential curvature,  $\kappa_r$  and  $\kappa_\theta$ . In terms of the rate of deflection  $v = v(r)$ , these rates of curvature are given by the relations

$$\kappa_r = -v'', \quad \kappa_\theta = -v'/r, \quad (22)$$

in which the primes denote differentiation with respect to  $r$ . The mechanical behavior of the visco-plastic plate is assumed to be given by the six linear expressions that specify Tresca's yield condition for a perfectly plastic sandwich plate (see for instance<sup>6</sup>, p. 56 ff.). The known solution of the perfectly plastic problem suggests that only two of these six linear expressions, namely

$$L_{(1)} = M_r - M_0, \quad L_{(2)} = M_\theta - M_0, \quad (23)$$

play a role in the solution of the visco-plastic problem, and the yield condition (23) will be used in the following. In (23), the symbol  $M_0$  stands for the fully plastic moment of the plate. By rotational symmetry  $M_r = M_\theta$  at the center of the plate. Both expressions (23) will therefore be positive, inside a certain circle  $r = \varrho$ . Thus;

$$\lambda \kappa_r = M_r - M_0, \quad \lambda \kappa_\theta = M_\theta - M_0 \quad \text{for } 0 \leq r \leq \varrho, \quad (24)$$

where  $\lambda$  is a constant that depends on the coefficient of viscosity of the plate material and on the thickness dimensions of plate core and cover sheets.

The equation of compatibility that is obtained by the elimination of  $v$  between the equations (22) therefore requires that

$$[r(M_\theta - M_0)]' = M_r - M_0 \quad \text{for } 0 \leq r \leq \varrho. \quad (25)$$

In addition to this equation, the bending moments must fulfill the equation of equilibrium

$$(r M_r)' - M_\theta = -\frac{1}{2} p r^2 \quad \text{for } 0 \leq r \leq R. \quad (26)$$

Outside the circle  $r = \varrho$ , the bending moment  $M_r$ , which vanishes at the simply supported edge  $r = R$ , will be smaller than  $M_0$ , so that

$$\kappa_r = 0 \quad \text{for } \varrho \leq r \leq R, \quad (27)$$

By the first equation (22), we therefore have

$$v'' = 0 \quad \text{for } \varrho \leq r \leq R. \quad (28)$$

It follows that

$$M_\theta - M_0 = -\lambda v'/r = -c/r \quad \text{for } \varrho \leq r \leq R, \quad (29)$$

<sup>6</sup> W. Prager: Introduction to Plasticity, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1959.

where  $c$  is a constant. Finally, at  $r = \varrho$ , the bending moment  $M_r$  and its first derivative must be continuous.

Omitting the details of the straightforward though lengthy calculations, we only state the following results.

For load intensities below the value  $6 M_0/R^2$  the plate remains rigid. When the load intensity exceeds this value, the radius  $\varrho$ , which satisfies  $0 \leq \varrho/R \leq 1$ , is specified by the transcendental equation

$$\frac{\varrho^3}{R^3} \left( 1 + \frac{3}{4} \log \frac{R}{\varrho} \right) = 1 - \frac{6 M_0}{p R^2}. \quad (30)$$

The bending moments then are given by

$$\left. \begin{aligned} M_r &= M_0 + \frac{3}{16} p R^2 \left( \frac{\varrho^2}{R^2} - \frac{r^2}{R^2} \right) \\ M_\theta &= M_0 + \frac{1}{16} p R^2 \left( 3 \frac{\varrho^2}{R^2} - \frac{r^2}{R^2} \right) \end{aligned} \right\} \text{for } 0 \leq r \leq \varrho \quad (31)$$

and

$$\left. \begin{aligned} M_r &= M_0 \left( 1 - \frac{R}{r} \right) + \frac{1}{6} p R^2 \left( \frac{R}{r} - \frac{r^2}{R^2} - \frac{3}{4} \frac{\varrho^3}{R^3} \frac{R}{r} \log \frac{R}{r} \right) \\ M_\theta &= M_0 + \frac{1}{8} p R^2 \frac{\varrho^3}{R^3} \frac{R}{r} \end{aligned} \right\} \text{for } \varrho \leq r \leq R. \quad (32)$$

Finally, the rate of deflection is given by

$$v = \frac{p \varrho^4}{64 \lambda} \left( \frac{r^4}{\varrho^4} - 6 \frac{r^2}{\varrho^2} + 8 \frac{R}{\varrho} - 3 \right) \text{ for } 0 \leq r \leq \varrho \quad (33)$$

and

$$v = \frac{p \varrho^4}{8 \lambda} \left( \frac{R}{\varrho} - \frac{r}{\varrho} \right) \text{ for } \varrho \leq r \leq R. \quad (34)$$

It is readily verified that for the threshold load  $p = 6 M_0/r^2$  the formulas (31) and (32) yield the known bending moments at the load-carrying capacity of a perfectly plastic plate. Since the transition to a perfectly plastic plate implies that  $p \rightarrow 6 M_0/R^2$ ,  $\varrho \rightarrow 0$ , and  $\lambda \rightarrow 0$ , equation (34) reduces to the statement that the rate of deflection of a perfectly plastic plate at the load-carrying capacity is an arbitrary positive multiple of  $R - r$ .

(Received, October 3, 1960)

## Die Berechnung des Vollstreifens (Plattenstreifens) mit regelmäßig sich wiederholenden Verstärkungen

Von F. Reinitzhuber, Rheinhausen

Mit 3 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Die Lösung für den frei drehbar gelagerten, gleichmäßig belasteten Plattenstreifen mit Mattenbewehrung wird angegeben. Der Streifen wird dabei in periodisch aufeinanderfolgende orthotrope Plattenstücke verschiedener Steifigkeit unterteilt.

Die vorliegende Arbeit setzt sich zum Ziel, einen Vollstreifen (zweiseitig gelagerte Platte, die sich nach zwei Richtungen ins Unendliche erstreckt) unter gleichmäßig

verteilter Last zu berechnen, der an seinen beiden Rändern freigelagert ist und in regelmäßigen Abständen Verstärkungen aufweist. Platten dieser Art kommen vor allem im Stahlbetonbau vor, wenn als Bewehrung Baustahlmatten verwendet werden, die sich übergreifen (Abb. 1). Nimmt man an, daß die Baustahlmatten ein Kontinuum darstellen, also in der Platte eine kontinuierliche Bewehrung bilden — was bei den relativ engen Abständen der Mattenstäbe weitgehend zutrifft — so können mit Baustahlmatten bewehrte Stahlbetonplatten gemäß der nachstehenden Arbeit berechnet werden.

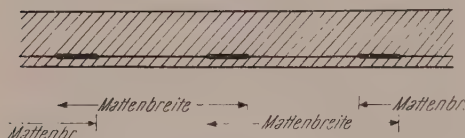


Abb. 1. Stahlbetonplatte mit Mattenbewehrung

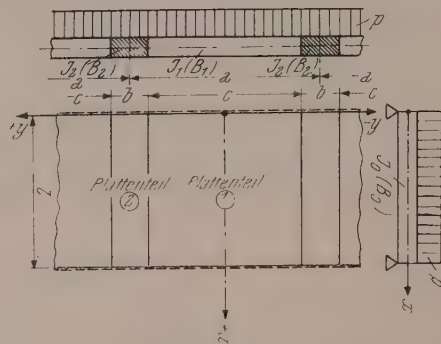


Abb. 2. Vollstreifen mit regelmäßig sich wiederholenden Verstärkungen

Die Bezeichnungen, die den weiteren Untersuchungen zugrunde gelegt werden, gehen aus Abb. 2 hervor. Die dort mit (1) und (2) bezeichneten Plattenteile mit verschiedener Biegesteifigkeit  $B_1$  und  $B_2$  in Längs- und der Biegesteifigkeit  $B_0$  in Querrichtung stellen orthotrope Platten dar, wobei

$$B_0 = \frac{1}{1 - \nu^2} E J_0$$

$$B_1 = \frac{1}{1 - \nu^2} E J_1$$

$$B_2 = \frac{1}{1 - \nu^2} E J_2$$

( $\nu$  = Querdehnungszahl,  $E$  = Elastizitätsmodul des Plattenmaterials).

Die Differentialgleichungen der Biegeflächen der beiden Plattenteile sind mit guter Näherung\* gegeben durch:

$$\text{Plattenteil (1)} \quad B_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2 \sqrt{B_1 B_0} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + B_0 \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} = p \quad (1a)$$

$$\text{Plattenteil (2)} \quad B_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + 2 \sqrt{B_2 B_0} \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial y^2} + B_0 \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} = p, \quad (1b)$$

wobei  $w_1 = w_1(x, y)$  die Durchbiegung eines Punktes der Mittelebene des Plattenteiles (1),

$w_2 = w_2(x, y)$  die Durchbiegung eines Punktes der Mittelebene des Plattenteiles (2) bedeuten.

Dann ergeben sich die inneren Kräfte und Auflagerreaktionen des unverstärkten Plattenteiles (1) aus:

\* siehe Olsen-Reinitzhuber: Die zweiseitig gelagerte Platte. 1. Band, 3. Auflage, S. 3ff. Berlin: Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, 1959.



$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{1,x} &= -B_1 \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) \\
\mathfrak{M}_{1,y} &= -B_0 \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) \\
\mathfrak{M}_{1,xy} &= -\sqrt{B_1 B_0} \left[ 1 - \frac{\nu}{2} \left( \sqrt{\frac{B_1}{B_0}} + \sqrt{\frac{B_0}{B_1}} \right) \right] \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \\
\mathfrak{Q}_{1,x} &= -B_1 \left\{ \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + \left[ \sqrt{\frac{B_0}{B_1}} + \frac{\nu}{2} \left( 1 - \frac{B_0}{B_1} \right) \right] \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial y^2} \right\} \\
\mathfrak{Q}_{1,y} &= -B_0 \left\{ \frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3} + \left[ \sqrt{\frac{B_1}{B_0}} + \frac{\nu}{2} \left( 1 - \frac{B_1}{B_0} \right) \right] \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2 \partial y} \right\} \\
\mathfrak{Q}_{1,x} &= -B_1 \left\{ \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + \sqrt{\frac{B_0}{B_1}} \left( 2 - \nu \sqrt{\frac{B_0}{B_1}} \right) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial y^2} \right\} \\
\mathfrak{Q}_{1,y} &= -B_0 \left\{ \frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3} + \sqrt{\frac{B_1}{B_0}} \left( 2 - \nu \sqrt{\frac{B_1}{B_0}} \right) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2 \partial y} \right\}
\end{aligned} \tag{2a}$$

und des verstärkten Plattenteiles (2) aus:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{2,x} &= -B_2 \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right) \\
\mathfrak{M}_{2,y} &= -B_0 \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right) \\
\mathfrak{M}_{2,xy} &= -\sqrt{B_2 B_0} \left[ 1 - \frac{\nu}{2} \left( \sqrt{\frac{B_2}{B_0}} + \sqrt{\frac{B_0}{B_2}} \right) \right] \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} \\
\mathfrak{Q}_{2,x} &= -B_2 \left\{ \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} + \left[ \sqrt{\frac{B_0}{B_2}} + \frac{\nu}{2} \left( 1 - \frac{B_0}{B_2} \right) \right] \frac{\partial^3 w_2}{\partial x \partial y^2} \right\} \\
\mathfrak{Q}_{2,y} &= -B_0 \left\{ \frac{\partial^3 w_2}{\partial y^3} + \left[ \sqrt{\frac{B_2}{B_0}} + \frac{\nu}{2} \left( 1 - \frac{B_2}{B_0} \right) \right] \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^2 \partial y} \right\} \\
\mathfrak{Q}_{2,x} &= -B_2 \left\{ \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} + \sqrt{\frac{B_0}{B_2}} \left( 2 - \nu \sqrt{\frac{B_0}{B_2}} \right) \frac{\partial^3 w_2}{\partial x \partial y^2} \right\} \\
\mathfrak{Q}_{2,y} &= -B_0 \left\{ \frac{\partial^3 w_2}{\partial y^3} + \sqrt{\frac{B_2}{B_0}} \left( 2 - \nu \sqrt{\frac{B_2}{B_0}} \right) \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^2 \partial y} \right\}
\end{aligned} \tag{2b}$$

Für die Durchbiegung des Plattenteiles (1) wird angesetzt:

$$\begin{aligned}
w_1 &= w_1' + w_1'' \\
w_1' &= \frac{p}{24 B_1} (x^4 - 2 l x^3 + l^3 x) = \frac{4 p l^4}{\pi^5 B_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \xi_m \\
w_1'' &= \frac{4 p l^4}{\pi^5 B_1} \sum_{m=1}^{\infty} (A_{1,m} \operatorname{Cov} \eta_{1,m} + D_{1,m} \eta_{1,m} \operatorname{Sin} \bar{\eta}_{1,m}) \sin \xi_m
\end{aligned} \tag{3a}$$

(aus Symmetriegründen ist  $m = 1, 3, 5, \dots$ ), wobei

$$\xi_m = m \pi \frac{x}{l} \quad \bar{\eta}_{1,m} = m \pi \frac{y}{l} \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_0}} \quad (4a)$$

und für die des Plattenteiles (2):

$$\left. \begin{aligned} w_2 &= w_2' + w_2'' \\ w_2' &= \frac{p}{24 B_2} (x^4 - 2l x^3 + l^3 x) = \frac{4 p l^4}{\pi^5 B_2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \xi_m \\ w_2'' &= \frac{4 p l^4}{\pi^5 B_2} \sum_{m=1}^{\infty} (A_{2,m} \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} \bar{\eta}_{2,m} + D_{2,m} \bar{\eta}_{2,m} \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \bar{\eta}_{2,m}) \sin \xi_m \end{aligned} \right\} \quad (3b)$$

(aus Symmetriegründen ist  $m = 1, 3, 5, \dots$ ), wobei

$$\xi_m = m \pi \frac{x}{l} \quad \bar{\eta}_{2,m} = m \pi \frac{y - \frac{a}{2}}{l} \sqrt[4]{\frac{B_2}{B_0}} \quad (4b)$$

Die Ansätze (3a) und (3b) sind Lösungen der Differentialgleichungen (1a) bzw. (1b), wie man sich durch Einsetzen überzeugen kann, so daß sich aus ihnen, mit Hilfe der Gl. (2a) bzw. (2b), die inneren Kräfte und Auflagerreaktionen ermitteln lassen. Diese sind dann für den unverstärkten Plattenteil (1)

$$\mathfrak{M}_{1,x} = + \frac{4 p l^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left\{ \left( 1 - \nu \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_0}} \right) (A_m \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} \bar{\eta}_m + D_m \bar{\eta}_m \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \bar{\eta}_m) - \right. \\ \left. - 2 \nu \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_0}} D_m \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} \bar{\eta}_m + \frac{1}{m^5} \right\} \sin \xi_m, \quad (5a)$$

$$\mathfrak{M}_{1,y} = - \frac{4 p l^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left\{ \left( \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_0}} - \nu \right) (A_m \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} \bar{\eta}_m + D_m \bar{\eta}_m \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \bar{\eta}_m) + \right. \\ \left. + 2 \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_0}} D_m \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} \bar{\eta}_m - \frac{\nu}{m^5} \right\} \sin \xi_m, \quad (5b)$$

$$\mathfrak{M}_{1,xy} = - \frac{4 p l^2}{\pi^3} \sqrt[4]{\frac{B_0}{B_1}} \left[ 1 - \frac{\nu}{2} \left( \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_0}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt[4]{\frac{B_0}{B_1}} \right) \right] \sum_{m=1}^{\infty} m^2 [A_m \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \bar{\eta}_m + D_m (\bar{\eta}_m \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} \bar{\eta}_m + \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \bar{\eta}_m)] \cos \xi_m, \quad (5c)$$

$$\mathfrak{D}_{1,x} = - \frac{4 p l}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} m^3 \left\{ \frac{\nu}{2} \left( \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_0}} - \sqrt[4]{\frac{B_0}{B_1}} \right) [A_m \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} \bar{\eta}_m + \right. \\ \left. + D_m (\bar{\eta}_m \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \bar{\eta}_m + 2 \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} \bar{\eta}_m)] + 2 D_m \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} \bar{\eta}_m - \frac{1}{m^5} \right\} \cos \xi_m, \quad (5d)$$

$$\mathfrak{D}_{1,y} = + \frac{4 p l}{\pi^2} \sqrt[4]{\frac{B_0}{B_1}} \sum_{m=1}^{\infty} m^3 \left\{ \frac{\nu}{2} \left( \sqrt[4]{\frac{B_0}{B_1}} - \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_0}} \right) [A_m \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \bar{\eta}_m + \right. \\ \left. + D_m (\bar{\eta}_m \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} \bar{\eta}_m + \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \bar{\eta}_m) - 2 D_m \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \bar{\eta}_m] \right\} \sin \xi_m, \quad (5e)$$

$$\mathfrak{U}_{1,x} = - \frac{4 p l}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} m^3 \left\{ \left( 1 - \nu \sqrt{\frac{B_0}{B_1}} \right) [A_m \mathfrak{C} \circ \bar{\eta}_m + \right. \\ \left. + D_m (\bar{\eta}_m \mathfrak{S} \text{in } \bar{\eta}_m + 2 \mathfrak{C} \circ \bar{\eta}_m)] + 2 D_m \mathfrak{C} \circ \bar{\eta} - \frac{1}{m^5} \right\} \cos \xi_m, \quad (5f)$$

$$\mathfrak{U}_{1,y} = + \frac{4 p l}{\pi^2} \sqrt{\frac{B_0}{B_1}} \sum_{m=1}^{\infty} m^3 \left\{ \left( 1 - \nu \sqrt{\frac{B_1}{B_0}} \right) [A_m \mathfrak{S} \text{in } \bar{\eta}_m + \right. \\ \left. + D_m (\bar{\eta}_m \mathfrak{C} \circ \bar{\eta}_m + \mathfrak{S} \text{in } \bar{\eta}_m)] - 2 D_m \mathfrak{S} \text{in } \bar{\eta}_m \right\} \sin \xi_m, \quad (5g)$$

und für den verstärkten Plattenteil (2) auch gleich den Gl. (5a) — (5g), wenn dort anstelle von  $B_1$  der Wert  $B_2$  geschrieben wird.

Die unbekannten Beiwerte  $A_{1,m}$ ,  $D_{1,m}$  bzw.  $A_{2,m}$ ,  $D_{2,m}$  der Ansätze (3a) und (3b) sind nun so zu bestimmen, daß die Randbedingungen erfüllt sind. Diese lauten: an den Auflagern

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x = l \end{array} \right\} w_1 = 0, \quad \mathfrak{M}_{1,x} = 0 \text{ bzw. } w_2 = 0, \quad \mathfrak{M}_{2,x} = 0 \quad (6a)$$

an den Symmetrieachsen

im Plattenteil (1)

im Plattenteil (2)

$$y = 0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0 \\ \mathfrak{Q}_{1,y} = 0 \end{array} \right. \quad y = \pm \frac{a}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_2}{\partial y} = 0 \\ \mathfrak{Q}_{2,y} = 0 \end{array} \right. \quad (6b)$$

am Übergang von Plattenteil (1) zu Plattenteil (2)

$$y = + \frac{c}{2} \left\{ \begin{array}{l} w_1 = w_2 \\ \frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial w_2}{\partial y} \\ \mathfrak{M}_{1,y} = \mathfrak{M}_{2,y} \\ \mathfrak{U}_{1,y} = \mathfrak{U}_{2,y} \end{array} \right. \quad (6c) \\ (6d) \\ (6e) \\ (6f)$$

Die Randbedingungen (6a) und (6b) werden durch die Ansätze (3a) und (3b) erfüllt, so daß zur Bestimmung der Beiwerte  $A_{1,m}$ ,  $D_{1,m}$  bzw.  $A_{2,m}$ ,  $D_{2,m}$  die Randbedingungen (6c) — (6f) zur Verfügung stehen.

Unter Zuhilfenahme der Gl. (5a) — (5g) ergibt sich aus (6c)

$$\frac{1}{B_1} \left[ \left( A_{1,m} \mathfrak{C} \circ \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} + D_{1,m} \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} \mathfrak{S} \text{in } \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} \right) + \frac{1}{m^5} \right] = \\ = \frac{1}{B_2} \left[ \left( A_{2,m} \mathfrak{C} \circ \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} + D_{2,m} \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} \mathfrak{S} \text{in } \frac{\alpha_{2,m}}{2} \right) + \frac{1}{m^5} \right] \quad (7a)$$



aus (6d)

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{B_1} \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_0}} \left[ A_{1,m} \sin \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} + D_{1,m} \left( \sin \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} + \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} \cos \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} \right) \right] = \\ & = - \frac{1}{B_2} \sqrt[4]{\frac{B_2}{B_0}} \left[ A_{2,m} \sin \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} + D_{2,m} \left( \sin \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} + \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} \cos \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (7b)$$

aus (6e)

$$\begin{aligned} & + \frac{B_0}{B_1} \left[ \left( \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_0}} - \nu \right) \left( A_{1,m} \cos \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} + D_{1,m} \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} \sin \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} \right) + \right. \\ & \quad \left. + 2 \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_0}} D_{1,m} \cos \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} - \frac{\nu}{m^5} \right] = \\ & = + \frac{B_0}{B_2} \left[ \left( \sqrt[4]{\frac{B_2}{B_0}} - \nu \right) \left( A_{2,m} \cos \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} + D_{2,m} \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} \sin \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} \right) + \right. \\ & \quad \left. + 2 \sqrt[4]{\frac{B_2}{B_0}} D_{2,m} \cos \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} - \frac{\nu}{m^5} \right] \end{aligned} \quad (7c)$$

aus (6f)

$$\begin{aligned} & + \sqrt[4]{\frac{B_0}{B_1}} \left\{ \left( 1 - \nu \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_0}} \right) \left[ A_{1,m} \sin \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} + D_{1,m} \left( \sin \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} + \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} \cos \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} \right) \right] - \right. \\ & \quad \left. - 2 D_{1,m} \sin \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} \right\} = \\ & = - \sqrt[4]{\frac{B_0}{B_2}} \left\{ \left( 1 - \nu \sqrt[4]{\frac{B_2}{B_0}} \right) \left[ A_{2,m} \sin \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} + D_{2,m} \left( \sin \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} + \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} \cos \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} \right) \right] - \right. \\ & \quad \left. - 2 D_{2,m} \sin \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} \right\}, \end{aligned} \quad (7d)$$

wobei

$$\bar{\alpha}_{1,m} = m \pi \frac{c}{l} \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_0}} \text{ bzw. } \bar{\alpha}_{2,m} = m \pi \frac{b}{l} \sqrt[4]{\frac{B_2}{B_0}}.$$

Aus den vier Gleichungen (7a) — (7d) ergeben sich die vier Unbekannten  $A_{1,m}$ ,  $D_{1,m}$  bzw.  $A_{2,m}$ ,  $D_{2,m}$  wie folgt:

$$\begin{aligned} A_{1,m} &= \frac{1}{m^5} \left( \frac{B_2}{B_0} - \frac{B_1}{B_0} \right) A_{1,m}; & D_{1,m} &= \frac{1}{m^5} \left( \frac{B_2}{B_0} - \frac{B_1}{B_0} \right) \Delta_{1,m} \\ A_{2,m} &= \frac{1}{m^5} \left( \frac{B_2}{B_0} - \frac{B_1}{B_0} \right) A_{2,m}; & D_{2,m} &= \frac{1}{m^5} \left( \frac{B_2}{B_0} - \frac{B_1}{B_0} \right) \Delta_{2,m} \end{aligned} \quad (8)$$

wobei

$$\begin{aligned} \Delta_{1,m} &= \frac{-p_{1,m} \sin \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} + q_{1,m} \cos \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2}}{\frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} + \sin \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} \cos \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2}}; & \Delta_{2,m} &= \frac{-p_{2,m} \sin \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} + q_{2,m} \cos \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2}}{\frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} + \sin \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} \cos \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2}} \\ A_{1,m} &= \frac{p_{1,m} \left( \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} \cos \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} + \sin \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} \right) - q_{1,m} \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} \sin \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2}}{\frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} + \sin \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} \cos \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2}} \end{aligned}$$

$$A_{2,m} = \frac{p_{2,m} \left( \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} \coth \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} + \sin \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} \right) - q_{2,m} \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} \sin \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2}}{\frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} + \sin \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} \coth \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2}}$$

$$p_{1,m} = + \frac{\varphi_{2,m} \Psi_m + \sigma_{2,m} \Gamma_m}{\text{Nenner}};$$

$$p_{2,m} = + \frac{\varphi_{1,m} \Psi_m - \sigma_{1,m} \Gamma_m}{\text{Nenner}}$$

$$q_{1,m} = - \sqrt[4]{\left(\frac{B_1}{B_0}\right)^3} \frac{\varphi_{1,m} \sigma_{2,m} + \sigma_{1,m} \varphi_{2,m}}{\text{Nenner}};$$

$$q_{2,m} = + \sqrt[4]{\left(\frac{B_2}{B_0}\right)^3} \frac{\varphi_{1,m} \sigma_{2,m} + \sigma_{1,m} \varphi_{2,m}}{\text{Nenner}}$$

$$\text{Nenner} = \left( \frac{B_1}{B_0} \varphi_{1,m} - \frac{B_2}{B_0} \varphi_{2,m} \right) \Psi_m - \left( \frac{B_1}{B_0} \sigma_{1,m} - \frac{B_2}{B_0} \sigma_{2,m} \right) \Gamma_m$$

$$\begin{aligned} \Psi_m = & \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_0}} \left[ \frac{2 \sin \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} \coth \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2}}{\frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} + \sin \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} \coth \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2}} - \left( 1 - \nu \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_0}} \right) \right] + \\ & + \sqrt[4]{\frac{B_2}{B_0}} \left[ \frac{2 \sin \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} \coth \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2}}{\frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} + \sin \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} \coth \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2}} - \left( 1 - \nu \sqrt[4]{\frac{B_2}{B_0}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\Gamma_m = \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_0}} \frac{2 \coth^2 \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2}}{\frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} + \sin \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} \coth \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2}} + \sqrt[4]{\frac{B_2}{B_0}} \frac{2 \coth^2 \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2}}{\frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} + \sin \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} \coth \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2}}$$

$$\varphi_{1,m} = \sqrt[4]{\frac{B_0}{B_1}} \frac{\frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} - \sin \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} \coth \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2}}{\frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} + \sin \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} \coth \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2}};$$

$$\varphi_{2,m} = \sqrt[4]{\frac{B_0}{B_2}} \frac{\frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} - \sin \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} \coth \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2}}{\frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} + \sin \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} \coth \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2}}$$

$$\sigma_{1,m} = \sqrt[4]{\frac{B_0}{B_1}} \frac{2 \sin^2 \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2}}{\frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} + \sin \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2} \coth \frac{\bar{\alpha}_{1,m}}{2}};$$

$$\sigma_{2,m} = \sqrt[4]{\frac{B_0}{B_2}} \frac{2 \sin^2 \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2}}{\frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} + \sin \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2} \coth \frac{\bar{\alpha}_{2,m}}{2}}.$$

Durch Einsetzen der Gl. (8) für  $A_{1,m}$ ,  $D_{1,m}$  bzw.  $A_{2,m}$ ,  $D_{2,m}$  in die Gl. (3a) — (3b) findet man die Durchbiegungen der Platte und durch Einsetzen in die Gl. (5a) — (5g) die inneren Kräfte und Auflagerkräfte.

Zahlenmäßig wurden die vorstehenden allgemeinen Ergebnisse für den Fall

$$b : c : l = 1 : 8 : 8, \quad \frac{B_1}{B_0} = 1,08, \quad \frac{B_2}{B_1} = 1,05 \text{ und } \nu = 1/6$$

ausgewertet, wobei die am meisten interessierenden Biegemomente  $\mathcal{M}_x$  in Plattenmitte ( $x = +\frac{l}{2}$ ) ermittelt wurden.

Der Verlauf der Biegemomente  $\mathfrak{M}_x$  im Schnitt  $x = +\frac{l}{2}$  ist in Abb. 3 dargestellt.

Danach tritt am Übergang vom verstärkten zum unverstärkten Plattenteil ein Sprung im Biegemoment  $\mathfrak{M}_x$  auf.

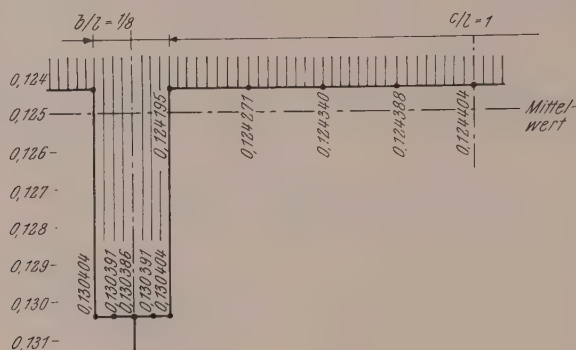


Abb. 3 Biegemomente  $\mathfrak{M}_x$  in Plattenmitte  $(x = +\frac{l}{2})$  für  $b:c:l = 1:8:8$ ,  $\frac{B_1}{B_0} = 1,08$ ,  $\frac{B_2}{B_0} = 1,05$  und  $\nu = 1/6$ .

Die Größe dieses Sprunges ist — wie weitere untersuchte Fälle zeigten — in erster Linie vom Verhältnis der Biegesteifigkeiten  $\frac{B_2}{B_1}$  der verstärkten zur unverstärkten Platte abhängig.

Der Größtwert  $\mathfrak{M}_x$  tritt am Rand der verstärkten Platte und der Kleinstwert  $\mathfrak{M}_x$  am Rand der unverstärkten Platte auf. Im unverstärkten Plattenteil steigt das Biegemoment  $\mathfrak{M}_x$  vom Plattenrand ( $y = \pm c/2$ ) zur Plattenmitte ( $y = 0$ ), und nähert sich mit steigender Plattenbreite  $c$  dem Wert  $\frac{pl^2}{8}$ . Im verstärkten Plattenteil fällt das Biegemoment  $\mathfrak{M}_x$  vom Plattenrand ( $y = +c/2$ ) zur Plattenmitte ( $y = +\frac{a}{2}$ ), um auch hier mit steigender Plattenbreite  $b$  dem Wert  $\frac{pl^2}{8}$  näherzukommen. Entsprechend den statischen Gegebenheiten beträgt der Mittelwert der  $\mathfrak{M}_x/pl^2$ -Linie im Schnitt ( $x = +l/2$ ) in Plattenmitte 0,125. Eine zahlenmäßige Auswertung der vorstehenden theoretischen Ergebnisse, die deren einfache praktische Anwendung ermöglicht, soll an anderer Stelle gebracht werden.

(Eingegangen am 26. September 1960)



# On finite pure bending of cylindrical tubes\*

By E. Reissner Cambridge, Massachusetts

With 1 Figure

**Summary.** A general formulation of the title problem is presented for arbitrary thin-walled cross sections. Bending moments are expanded in powers of curvatures. Particular case of a circular cross-section tube is considered.

## I. Introduction

We are concerned in what follows with a rather general and simple formulation of the problem of finite pure bending of thin-walled cylindrical tubes of arbitrary cross section. Our analysis contains as special cases Brazier's analysis of the flattening instability of circular cross section tubes<sup>1</sup> and our own refinement of Brazier's theory, which in turn is a special case of results for toroidal tubes with circular cross section<sup>2</sup>.

The physical basis of the present work is similar to that of our earlier work. Certain simplifications arise through the consideration of initially straight tubes instead of toroidal tubes. Further simplifications are due to an appropriate use of the variational theorem for displacements in elasticity.

## II. Formulation of the Problem

We consider a cylindrical tube with cross section before deformation specified by middle surface equations  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ , where  $s$  represents circumferential arclength, and by a wall thickness function  $h = h(s)$ .

The originally cylindrical tube is deformed through the application of end moments  $M_x$  and  $M_y$ . These moments  $M_x$  and  $M_y$  result in a curving of the axial fibers of the tube, with curvature radii  $R_x$  and  $R_y$ . As long as elementary beam theory applies, the radii  $R_x$ ,  $R_y$  and the moments  $M_x$  and  $M_y$  are related by equations of the form

$$M_x = \frac{\oint E h x^2 ds}{R_x} + \frac{\oint E h x y ds}{R_y} \quad (1)$$

$$M_y = \frac{\oint E h x y ds}{R_x} + \frac{\oint E h y^2 ds}{R_y} \quad (2)$$

In these formulas  $E = E(s)$  is the modulus of elasticity for axial stress, and the origin of the  $x, y$ -system of coordinates is chosen such that

$$\oint E h x ds = 0, \quad \oint E h y ds = 0. \quad (3)$$

Associated with the uniform curving of axial fibers is a deformation of the cross section of the tube which changes  $x$  into  $x + u$  and  $y$  into  $y + v$  and which is neglected in elementary beam theory. It is of the essence in what follows that this cross sectional

\* A report on work which is part of a project supported by the Office of Naval Research of the United States Navy.

<sup>1</sup> L. G. Brazier, Proc. Roy. Soc. A, 116, 104–114, 1927.

<sup>2</sup> E. Reissner, Proc. 3rd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. 51–69, 1958, and J. Appl. Mech. 26, 386–392, 1959.

deformation may be assumed to take place without meridional extension of the middle surface of the tube (Figure 1).

The linear displacements  $u$  and  $v$  define an angular displacement  $\beta$  which in turn defines a circumferential bending strain  $\kappa$ , given by

$$\kappa = \frac{d\beta}{ds} \quad (4)$$

The components  $u$ ,  $v$  and  $\beta$  are connected through two relations which may be read from Figure 1, and which are

$$\begin{aligned} \frac{d(x+u)}{ds} &= \cos(\varphi + \beta), \\ \frac{d(y+v)}{ds} &= \sin(\varphi + \beta) \end{aligned} \quad (5)$$

In addition to the circumferential bending strain  $\kappa$  we have an axial direct strain  $\varepsilon$ , which through a stress strain relation of the form  $\sigma = E \varepsilon$ , enters into the formulas for moment components  $M_x$  and  $M_y$ . These moment components are defined with reference to the deformed cross section, as follows:

$$M_x = \oint E h \varepsilon (x+u) ds, \quad M_y = \oint E h \varepsilon (y+v) ds \quad (6)$$

In order to express  $\varepsilon$  in terms of  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $u$ ,  $v$  we make use of the fact that pure bending of the tube takes place in such a way that plane sections perpendicular to the axis of the undeformed tube are deformed into plane sections perpendicular to the curved axis of the deformed tube. This means that  $\varepsilon$  is given by the formula

$$\varepsilon = \frac{x+u}{R_x} + \frac{y+v}{R_y} \quad (7)$$

Introduction of (7) into equations (6) leads to expressions for  $M_x$  and  $M_y$  which are the extensions of (1) and (2) and which are

$$M_x = \frac{\oint E h (x+u)^2 ds}{R_x} + \frac{\oint E h (x+u)(y+v) ds}{R_y} \quad (8)$$

$$M_y = \frac{\oint E h (x+u)(y+v) ds}{R_x} + \frac{\oint E h (y+v)^2 ds}{R_y} \quad (9)$$

In order that the cross sections of the tube are free of resultant forces, we must further have

$$\frac{\oint E h (x+u) ds}{R_x} + \frac{\oint E h (y+v) ds}{R_y} = 0 \quad (10)$$

which generalizes equations (3) consistent with the step from (1) and (2) to (8) and (9).

In order to evaluate the basic formulas (8) and (9) it appears necessary to determine the functions  $u$  and  $v$  in their dependence on the geometry of the cross section and on the values of  $R_x$  and  $R_y$ . It will be seen in what follows that a somewhat simpler procedure is possible in which  $\varepsilon$  and  $\beta$  are determined rather than  $u$  and  $v$ .

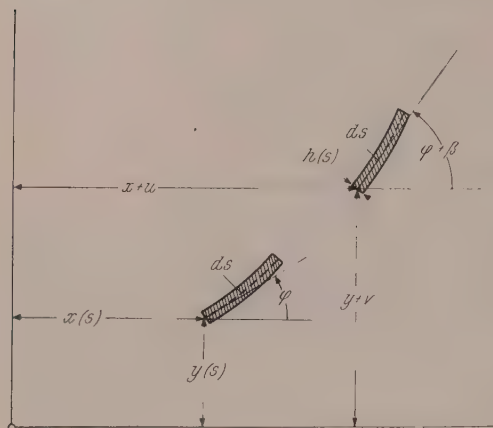


Fig. 1. Element of tube cross section before and after deformation

### III. Derivation of Differential Equations

We base our derivation on the requirement that, for given values of  $R_x$  and  $R_y$ , the strain energy of the bent tube be a minimum. We take as expression for strain energy, per unit of axial tube length

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \oint [C \varepsilon^2 + D \kappa^2] ds \quad (11)$$

where  $\varepsilon$  and  $\kappa$  are given by (7) and (4), where  $C = E h$  and where  $D$  is a circumferential bending stiffness function which for isotropic homogeneous tube materials is given by  $D = E h^3/12 (1 - \nu^2)$ .

The quantity  $\Pi_s$  is to be made a minimum subject to the constraint equations (5). Considering the form of  $\varepsilon$  and  $\kappa$  in (7) and (4) we may evaluate the minimum condition without explicit use of the displacement components  $u$  and  $v$  by writing as constraint condition

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{\cos(\varphi + \beta)}{R_x} + \frac{\sin(\varphi + \beta)}{R_y} \quad (12)$$

Introducing  $\kappa$  from (4) and introducing the constraint condition (12) by means of a Lagrange multiplier  $F$  the condition of minimum strain energy assumes the following form

$$\delta \oint \left\{ \frac{1}{2} C \varepsilon^2 + \frac{1}{2} D \left( \frac{d\beta}{ds} \right)^2 + F \left[ \frac{d\varepsilon}{ds} - \frac{\cos(\varphi + \beta)}{R_x} - \frac{\sin(\varphi + \beta)}{R_y} \right] \right\} ds = 0 \quad (13)$$

The variational equation (13) is equivalent to two differential equations of the form

$$\frac{dF}{ds} = C \varepsilon \quad (14)$$

and

$$\frac{d}{ds} \left( D \frac{d\beta}{ds} \right) = \left[ \frac{\sin(\varphi + \beta)}{R_x} - \frac{\cos(\varphi + \beta)}{R_y} \right] F \quad (15)$$

which must hold, together with the constraint equation (12). Boundary conditions for the system (12), (14) and (15) are the conditions of periodicity in  $s$  for  $\varepsilon$ ,  $F$ ,  $\beta$  and  $d\beta/ds$ . In view of one of these periodicity conditions we have  $\oint C \varepsilon ds = 0$  so that the condition of no resultant force over the tube cross section is automatically satisfied.

Equations (8) and (9) for  $M_x$  and  $M_y$  may now be written, through the use of (6) and appropriate integration by parts, in the alternate form

$$M_x = - \oint F \cos(\varphi + \beta) ds, \quad M_y = - \oint F \sin(\varphi + \beta) ds \quad (16)$$

We may finally reduce the two first-order equations (12) and (14) to the second order differential equation

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{C} \frac{dF}{ds} \right) = \frac{\cos(\varphi + \beta)}{R_x} + \frac{\sin(\varphi + \beta)}{R_y} \quad (17)$$

and thereby reduce the problem to the two simultaneous second order equations (15) and (17) for  $\beta$  and  $F$ .

We note that these two equations may be written in the form

$$\frac{d}{ds} \left( D \frac{d\beta}{ds} \right) = \left[ \left( \frac{\sin \varphi}{R_x} - \frac{\cos \varphi}{R_y} \right) \cos \beta + \left( \frac{\cos \varphi}{R_x} + \frac{\sin \varphi}{R_y} \right) \sin \beta \right] F \quad (15')$$



and

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{C} \frac{dF}{ds} \right) = \left( \frac{\cos \varphi}{R_x} + \frac{\sin \varphi}{R_y} \right) \cos \beta - \left( \frac{\sin \varphi}{R_x} - \frac{\cos \varphi}{R_y} \right) \sin \beta. \quad (17')$$

Equations (15') and (17') may be used as the starting point of an expansion procedure which will now be discussed.

#### IV. Expansion in Powers of $1/R_x$ and $1/R_y$

A formal expansion procedure for (15') and (17') which is suggested by the appearance of these equations upon writing  $\cos \beta = 1 - \frac{1}{2} \beta^2 \pm \dots$ ,  $\sin \beta = \beta - \frac{1}{6} \beta^3 \pm \dots$  consists in setting

$$F = F_1 + F_3 + \dots, \quad \beta = \beta_2 + \beta_4 + \dots \quad (18)$$

where  $F_n$  and  $\beta_n$  are homogeneous of degree  $n$  in the quantities  $1/R_x$  and  $1/R_y$ . In particular

$$F_1 = \frac{F_{10}}{R_x} + \frac{F_{01}}{R_y}, \quad \beta_2 = \frac{\beta_{20}}{R_x^2} + \frac{\beta_{11}}{R_x R_y} + \frac{\beta_{02}}{R_y^2} \quad (19)$$

$$F_3 = \frac{F_{30}}{R_x^3} + \frac{F_{21}}{R_x^2 R_y} + \frac{F_{12}}{R_x R_y^2} + \frac{F_{03}}{R_y^3}. \quad (20)$$

Introduction of (18) to (20) into (15') and (17'), written as

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( D \frac{d\beta}{ds} \right) &= \left[ \left( \frac{\sin \varphi}{R_x} - \frac{\cos \varphi}{R_y} \right) \left( 1 - \frac{1}{2} \beta^2 \pm \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\cos \varphi}{R_x} + \frac{\sin \varphi}{R_y} \right) \left( \beta - \frac{1}{6} \beta^3 \pm \dots \right) \right] F \end{aligned} \quad (15'')$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{C} \frac{dF}{ds} \right) &= \left( \frac{\cos \varphi}{R_x} + \frac{\sin \varphi}{R_y} \right) \left( 1 - \frac{1}{2} \beta^2 \pm \dots \right) \\ &\quad - \left( \frac{\sin \varphi}{R_x} - \frac{\cos \varphi}{R_y} \right) \left( \beta - \frac{1}{6} \beta^3 \pm \dots \right) \end{aligned} \quad (17'')$$

leads to the following system of successive differential equations

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{C} \frac{dF_{10}}{ds} \right) = \cos \varphi, \quad \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{C} \frac{dF_{01}}{ds} \right) = \sin \varphi \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( D \frac{d\beta_{20}}{ds} \right) &= F_{10} \sin \varphi, & \frac{d}{ds} \left( D \frac{d\beta_{02}}{ds} \right) &= -F_{01} \cos \varphi \\ \frac{d}{ds} \left( D \frac{d\beta_{11}}{ds} \right) &= F_{01} \sin \varphi - F_{10} \cos \varphi \end{aligned} \quad (22)$$

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{C} \frac{dF_{30}}{ds} \right) = -\beta_{20} \sin \varphi, \quad \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{C} \frac{dF_{03}}{ds} \right) = \beta_{02} \cos \varphi \quad (23)$$

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{C} \frac{dF_{21}}{ds} \right) = \beta_{20} \cos \varphi - \beta_{11} \sin \varphi, \quad \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{C} \frac{dF_{12}}{ds} \right) = \beta_{11} \cos \varphi - \beta_{02} \sin \varphi.$$

Solution of (21) to (23), and of the corresponding subsequent systems, is carried out by direct integration. We find from (21) and from the periodicity condition in view of the fact that  $\cos \varphi = dx/ds$  and  $\sin \varphi = dy/ds$ ,

$$\frac{1}{C} \frac{dF_{10}}{ds} = x(s), \quad \frac{1}{C} \frac{dF_{01}}{ds} = y(s) \quad (24)$$

and

$$F_{10} = \int C x ds, \quad F_{01} = \int C y ds. \quad (25)$$

From (22) follows

$$D \frac{d\beta_{20}}{ds} = \int F_{10} \sin \varphi ds = F_{10} y - \int \frac{dF_{10}}{ds} y ds = F_{10} y - \int C x y ds \quad (26)$$

with corresponding expressions for  $d\beta_{11}/ds$  and  $d\beta_{02}/ds$ . It is apparent that, in general, further integrations must be carried out numerically.

Corresponding expansions for applied moments, as defined by (16) are of the form

$$\begin{aligned} M_x &= -\oint [\cos \varphi \cos \beta - \sin \varphi \sin \beta] F ds \\ &= -\oint [F_1 \cos \varphi + (F_3 \cos \varphi - F_1 \beta_2 \sin \varphi) + \dots] ds \end{aligned} \quad (27)$$

and

$$M_y = -\oint [F_1 \sin \varphi + (F_3 \sin \varphi + F_1 \beta_2 \cos \varphi) + \dots] ds. \quad (28)$$

With (19), (20) and (25) it is found that  $M_x$  may be written as

$$\begin{aligned} M_x &= \oint \frac{C x^2 ds}{R_x} - \left[ \frac{X_{20}}{R_x^2} + \frac{X_{12}}{R_x R_y} + \frac{X_{02}}{R_y^2} + \dots \right] \frac{1}{R_x} \\ &+ \frac{\oint C x y ds}{R_y} - \left[ \frac{Y_{20}}{R_x^2} + \frac{Y_{12}}{R_x R_y} + \frac{Y_{02}}{R_y^2} + \dots \right] \frac{1}{R_y} \end{aligned} \quad (29)$$

where the  $X_{jk}$  and  $Y_{jk}$  are suitable constants. An analogous expression may be deduced for  $M_y$ .

The following observations may be made:

1. Equation (29), when specialized to the case of the homogeneous constant-wall thickness, circular-cross-section tube, and without any of the terms represented by dots or the terms with  $1/R_y$ , reduces to the formula of *Brazier*<sup>1</sup> for the moment  $M_x$  in terms of the curvature  $1/R_x$ .

2. As long as the calculations of  $M_x$  and  $M_y$  do not go beyond third-degree terms in  $R^{-1}$  they may equally well be considered to be based on a linear system of differential equations, of the form

$$\frac{d}{ds} \left( D \frac{d\beta}{ds} \right) - \left( \frac{\sin \varphi}{R_x} - \frac{\cos \varphi}{R_y} \right) F = 0 \quad (30)$$

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{C} \frac{dF}{ds} \right) + \left( \frac{\sin \varphi}{R_x} - \frac{\cos \varphi}{R_y} \right) \beta = \frac{\cos \varphi}{R_x} + \frac{\sin \varphi}{R_y}. \quad (31)$$

Associated with this linear system are non-linear expressions for  $M_x$  and  $M_y$  of the form

$$M_x = \oint [\cos \varphi - \beta \sin \varphi] F ds \quad (32)$$

<sup>1</sup> see p. 165.

$$M_y = \oint [\sin \varphi + \beta \cos \varphi] F ds \quad (33)$$

3. Higher degree terms than those displayed in (29) may have an effect of the order of ten percent or more in the range of practical interest of the theory<sup>2</sup>. The fact that this may be so becomes apparent even without explicit calculations upon introduction of appropriate non-dimensional variables and parameters.

### V. Equations for the Circular-Cross Section Tube

We designate the radius of the circular cross section by  $b$  and write the coordinates of the middle surface of the tube in terms of a polar angle  $\xi$ , as follows:

$$x = b \cos \xi, \quad y = -b \sin \xi \quad (34)$$

Therewith,

$$s = b \xi, \quad \varphi = \xi \quad (35)$$

and equations (15) to (17) become

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{D}{b^2} \frac{d\beta}{d\xi} \right) = \left[ \frac{\sin(\xi + \beta)}{R_x} - \frac{\cos(\xi + \beta)}{R_y} \right] F \quad (36)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{C} \frac{dF}{d\xi} \right) = \left[ \frac{\cos(\xi + \beta)}{R_x} + \frac{\sin(\xi + \beta)}{R_y} \right] b^2 \quad (37)$$

$$M_x = -b \int_0^{2\pi} F \cos(\xi + \beta) d\xi, \quad M_y = -b \int_0^{2\pi} F \sin(\xi + \beta) d\xi \quad (38)$$

If we limit ourselves in what follows to the case that  $D$  and  $C$  are independent of  $\xi$  then, because of symmetry, we may further limit ourselves to the consideration of the case  $1/R_y = 0$  and  $M_y = 0$ . Writing  $R_x = R$  we have then

$$\frac{d^2 \beta}{d\xi^2} = \frac{b^2}{DR} [\sin \xi \cos \beta + \cos \xi \sin \beta] F \quad (39)$$

$$\frac{d^2 F}{d\xi^2} = \frac{b^2 C}{R} [\cos \xi \cos \beta - \sin \xi \sin \beta] \quad (40)$$

and

$$M = -b \int_0^{2\pi} [\cos \xi \cos \beta - \sin \xi \sin \beta] F ds \quad (41)$$

If we further set

$$F = \frac{b^2 C}{R} f, \quad \alpha = \frac{b^2}{R} \sqrt{\frac{C}{D}} \quad (42)$$

and indicate differentiation with respect to  $\xi$  by primes, then the system (39), (40) assumes the form

$$\beta'' = \alpha^2 [\sin \xi \cos \beta + \cos \xi \sin \beta] f \quad (43)$$

$$f'' = \cos \xi \cos \beta - \sin \xi \sin \beta \quad (44)$$

and equation (41) becomes

$$M = -\frac{EI}{R} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\cos \xi \cos \beta - \sin \xi \sin \beta] f d\xi \quad (45)$$

<sup>2</sup> see p. 165.

where  $EI = \pi C b^3$  is the bending stiffness factor of the tube according to elementary theory. Equation (45) may be written in the alternate form

$$m = \frac{M}{\pi b \sqrt{CD}} = -\frac{\alpha}{\pi} \int_0^{2\pi} [\cos \xi \cos \beta - \sin \xi \sin \beta] f d\xi \quad (45')$$

in which a dimensionless applied moment  $m$  appears as a function of the dimensionless curvature parameter  $\alpha$ .

Equation (45') may be simplified by introducing (44) and by integrating by parts. In this way there follows the relation

$$m = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{2\pi} [f']^2 d\xi \quad (46)$$

Equations (43) and (44) may be solved by expansion in powers of  $\alpha^2$ . We set

$$f = f_0 + \alpha^2 f_2 + \dots, \quad \beta = \alpha^2 \beta_2 + \alpha^4 \beta_4 + \dots \quad (47)$$

and expand both  $\cos \beta$  and  $\sin \beta$  in powers of  $\alpha^2$ . In this way we obtain a system of successive differential equations of which we list the first seven equations, as follows:

$$f_0'' = \cos \xi, \quad \beta_2'' = f_0 \sin \xi \quad (48)$$

$$f_2'' = -\beta_2 \sin \xi, \quad \beta_4'' = f_0 \beta_2 \cos \xi + f_2 \sin \xi \quad (49)$$

$$f_4'' = -\beta_4 \sin \xi - \frac{1}{2} \beta_2^2 \cos \xi \quad (50)$$

$$\beta_6'' = (f_4 - \frac{1}{2} f_0 \beta_2^2) \sin \xi + (f_2 \beta_2 + f_0 \beta_4) \cos \xi \quad (51)$$

$$f_6'' = -\beta_2 \beta_4 \cos \xi - (\beta_6 - \frac{1}{6} \beta_2^3) \sin \xi \quad (52)$$

The solutions of (48) to (52) must be periodic of period  $2\pi$  in  $\xi$ . We list below the form of these solutions for equations (48) to (50).

$$f_0 = -\cos \xi, \quad \beta_2 = \frac{1}{8} \sin 2\xi \quad (53)$$

$$f_2 = \frac{1}{16} \left( \cos \xi - \frac{1}{9} \cos 3\xi \right), \quad \beta_4 = \frac{1}{144} \left( \sin 2\xi + \frac{5}{16} \sin 4\xi \right) \quad (54)$$

$$f_4 = \frac{17}{32 \cdot 72} \left( \cos \xi - \frac{10}{153} \cos 3\xi - \frac{7}{425} \cos 5\xi \right) \quad (55)$$

In terms of these expansions we have for the dimensionless moment  $m$ ,

$$\pi m = \alpha \int_0^{2\pi} \{ (f_0')^2 + 2f_0' f_2' \alpha^2 + [(f_2')^2 + 2f_0' f_4'] \alpha^4 + \dots \} d\xi \quad (56)$$

Introduction of (53) to (55) results in the following explicit formula for  $m$ ,

$$m = \alpha - \frac{1}{8} \alpha^3 - \frac{1}{96} \alpha^5 + \dots \quad (57)$$



Equation (57) is in agreement with our previous result for this problem<sup>2</sup> and reduces, upon omission of all terms except the first two, to Brazier's result<sup>1</sup>.

In order to delineate the range of values of  $\alpha$  which is of practical interest, we determine the value of  $\alpha$  for which flattening instability occurs. This value of  $\alpha$  is obtained by solving the equation  $dm/d\alpha = 0$ . From (57) follows for this value according to Brazier  $\alpha_B^2 = 8/3 \approx 2.666$  while if  $\alpha^5$  is retained in (57) we obtain  $\alpha_C^2 = (2/5)(\sqrt{201} - 9) \approx 2.071$ . Corresponding values of  $m$  are  $m_B = 1.086$  and  $m_C = 0.998$ . These numerical data indicate that the exact value of  $m$  for which  $dm/d\alpha = 0$  may differ from Brazier's value by an appreciable amount. They also indicate that it will be of interest to obtain numerically more accurate solutions of (43) and (44) than given here, for values of  $\alpha^2$  in the range from two to three.

(Received July 25, 1960)

## Entwicklung auf dem Gebiete der Armierungsstähle Bewertung des Sicherheitsgrades

Von M. Roš (Baden/Schweiz) und A. Eichinger (Emmenbrücke/Schweiz)

**Zusammenfassung.** Die Frage der Beurteilung des Sicherheitsgrades bei Stählen auf Grund von Minimalwerten bzw. von Mittelwerten und zulässiger Abweichung wird diskutiert.

Seit etwa gut drei Jahrzehnten sind auf dem Gebiet der Armierungsstähle grundsätzliche Veränderungen eingetreten. Zu dem früher fast ausnahmslos verwendeten gewöhnlichen Betoneisen kamen allmählich die hochwertigen Stähle mit glatter und mit profilierter Oberfläche für schlaife und für vorgespannte Armierung hinzu. Zur Hebung der Festigkeit werden verschiedene Herstellungsverfahren angewendet, wie Kaltverwinden unter Zug, Kaltrecken, Legieren (besonders mit C, Si, Mn), Ziehen im Walzzustand, bzw. im patentierten Zustand der Drähte, Anlassen und Vergüten. Zu den Anforderungen an die Streckgrenze und Festigkeit, bei noch ausreichender Zähigkeit, kam mit steigender Dimension und Höhe der zulässigen Beanspruchung die Haftfestigkeit hinzu, die durch geeignete Profilierung der Oberfläche der Stahleinlagen auf die gewünschte Höhe gehoben werden kann.

Durch diese Entwicklung wurden — außer wirtschaftlichen Vorteilen — viele technische Möglichkeiten im Stahlbetonbau erst neu geschaffen, die aber eine verschärfte Kontrolle der Baumaterialien erfordern. Die gegenwärtig gültigen Vorschriften, Normen und Richtlinien machen die zulässige Beanspruchung eines Werkstoffes in erster Linie von seinen im Laboratorium ausgewiesenen Festigkeitseigenschaften abhängig. Dabei wird entweder der Mindestwert für eine Materialgruppe, oder der Mittelwert mit zulässigen maximalen Abweichungen vorgeschrieben.

Beide Arten der Festlegung des charakteristischen Wertes für einen Werkstoff: a) des Minimalwertes und b) des Mittelwertes mit zulässigen Abweichungen der Einzelwerte, sind in dieser Form anfechtbar.

### I. Minimalwert

Dieser hängt naturgemäß von der Anzahl Proben ab, indem bei großer Probenzahl niedrigere Werte erwischt werden als bei geringer Probenzahl. Grundsätzlich stellt sich die Frage, ob bei zunehmender Probenzahl der Mindestwert gegen Null geht oder

nicht. Wird die sogenannte Normalverteilung der Merkmal-Abweichungen vom Mittelwert angenommen, dann müßte in der Tat mit zunehmender Probenzahl mit immer kleineren Mindestwerten gerechnet werden.

## II. Mittelwert

Desgleichen kann der Mittelwert bei kleiner Probenzahl von jenem bei großer Probenzahl erheblich abweichen. Eine Vorschrift, die bei Stählen sowohl den Mittelwert, wie auch die noch zulässige Abweichung der Einzelwerte bei relativ geringer Probenzahl festlegen würde, wäre bei Abnahmen von einzelnen Losen in der Regel nicht tragbar. Aus diesem Grunde sind auch bei Stählen in den meisten Ländern nur die Mindestwerte, die garantiert werden müssen, festgelegt. Bevor darin eine Änderung vorgenommen werden kann, müßte im Hinblick darauf, daß mit einer Normalverteilung der Abweichungen bei den Festigkeitseigenschaften nicht immer zu rechnen ist, der von jeweiliger Probenzahl abhängige Mittelwert und die noch zulässige maximale Abweichung für jedes Merkmal und jedes Werk gesondert durch große Probenreihen untersucht werden.

Anders liegen die Verhältnisse beim Beton. Werden während dem Bau Vergleichswürfel laufend geprüft, dann muß bei entsprechend großer Probenzahl auch mit solchen Einzelwerten gerechnet werden, die unterhalb den in den Normen festgesetzten Mindestwerten liegen. Die gegenwärtig gültigen Vorschriften für die Würfel Festigkeit des Betons können bei beliebig großer Probenzahl in der Regel nicht eingehalten werden. Andererseits geht die Annahme der Normalverteilung, nach der auch mit zunehmender Probenzahl mit immer kleinerem Mindestwert gerechnet werden müßte, zu weit. Daß dem nicht so ist, beweist die Erfahrung, indem die wirklichen Schäden stets auf besondere Umstände zurückzuführen waren, die von der Wahrscheinlichkeitsrechnung gar nicht erfaßt werden können. Diese Ausreißer fügen sich nämlich bei statistischer Auswertung großer Prüfreihen der normalen Glockenkurve nicht ein, sondern treten manchmal in solchen Bereichen auf, in denen sie nach den üblichen Annahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung gar nicht erwartet werden sollten.

Ein wesentlicher Unterschied in der Beurteilung der Sicherheit eines Bauwerks ist noch zu machen je nach dem, ob das im Werk hergestellte Material laufend (wie beim Stahl) geprüft wird, wobei ungenügende Lose bzw. Chargen ausgeschieden werden können — oder ob die Vergleichswürfel während dem Bau (wie beim Beton) geprüft werden, ohne daß normalerweise das den ungenügenden Proben entsprechende, bereits verarbeitete Material, von der Verwendung ausgeschlossen werden könnte. In letzterem Fall muß mit größeren Abweichungen gerechnet werden. Es muß aber die Möglichkeit offen bleiben, daß im Fall völlig ungenügender Versuchswerte der entsprechende Bauteil entfernt werden müßte. Bevor mit dem Bau weiter gegangen wird, sollte naturgemäß die Ursache der Mängel abgeklärt und nach Möglichkeit behoben werden. Sich auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung unter der Annahme der sogenannten Normalverteilung der Abweichungen auszureden, wäre ein gefährliches Unterfangen, das durch die bisherigen Erfahrungen nicht gerechtfertigt werden könnte. Man kann nicht den ganzen Sicherheitsgrad nur zur Deckung der Schwankungen der Materialeigenschaften aufzehren, indem dieser noch viele andere Mängel zu berücksichtigen hat, wie: Fehler in den Belastungsannahmen, in der Konstruktion, Berechnung und Ausführung, Setzungen der Gerüste und des Baugrundes, sowie Mängel im Unterhalt des Bauwerks und dergleichen mehr. Wie weit man mit den zulässigen Spannungen bei festliegender Bemessungsart gehen darf, hängt auch von der Treffsicherheit in der Erreichung der erforderlichen Festigkeitswerte ab, was



noch von Werk zu Werk und Land zu Land verschieden sein wird. Diese Frage kann nur durch langjährige Erfahrung für ein bestimmtes Land oder sogar nur für ein Werk bzw. eine Baustelle beantwortet werden (beispielsweise je nach dem zur Verfügung stehenden Sand, Kies, Zement und Wasser sowie Betonierungsanlagen beim Beton).

### Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

Die Beurteilung des Sicherheitsgrades auf Grund des Mittelwertes und der zulässigen Abweichungen nach unten, wie auch bei gewissen Werten — z. B. Härte und Festigkeit — mit Angabe des Grenzgebietes nach oben, ist nach unserer Erfahrung auf die Stähle vorläufig nicht allgemein anwendbar. Nach den gegenwärtig gültigen Normen, Vorschriften bzw. Richtlinien müssen von den Lieferwerken Mindestwerte allein bzw. Grenzwerte allein garantiert werden, jedoch nicht Mittelwert und Grenzwerte zugleich. Die Lose mit ungenügenden Ergebnissen werden ausgeschieden, so daß sie in das Bauwerk nicht gelangen sollten. Auf das abgelieferte Material kann demnach die Wahrscheinlichkeitsrechnung, unter der üblichen Annahme der sogenannten Normalverteilung (Glockenkurve), keine allgemeine Anwendung finden. Ob bei Betonbauwerken mit laufender Prüfung von Vergleichswürfeln während dem Bau, die Annahme einer Normalverteilung brauchbar ist, muß die Erfahrung lehren, was noch stark davon abhängen wird, ob es sich vorwiegend um Handarbeit oder um maschinelle Herstellung handelt. Zuweitgehende Schlüsse aus der Annahme einer Normalverteilung — so auch jene betreffend die Möglichkeit bzw. Wahrscheinlichkeit völliger Versager — sind nicht begründbar. Dagegen kann beim Beton — abweichend vom Stahl — der Mittelwert mit zulässigen Abweichungen, das Material während einer Bauperiode besser charakterisieren als der Mindestwert allein, wobei aber auch für den Mittelwert eine von der Probenzahl abhängige Abweichung toleriert werden müßte.

Die negative Stellungnahme zur Frage der Beurteilung des Sicherheitsgrades bei Stählen auf Grund des Mittelwertes und der zulässigen Abweichungen ist so aufzufassen, daß dies vorläufig und zwar mangels an ausreichenden Auswertungen der wirklich vorhandenen Verteilungsarten der Abweichungen vom Mittelwert für die verschiedenen Eigenschaften der Stähle, praktisch nicht durchführbar ist. Eine Normalverteilung ohne Transformation des Merkmals anzunehmen, ohne den notwendigen Ausweis auf Grund der Auswertung von umfangreichen Versuchsreihen, wäre zu problematisch, als daß sie für bindende Qualitätsvorschriften von Stählen in Frage käme. Sollen die Garantiewerte von den gegenwärtig gültigen Mindestwerten auf Mittelwerte und zulässige Abweichungen umgestellt werden, dann müßten zuerst die in den einzelnen Werken vorhandenen großen Prüfreiheiten statistisch ausgewertet, in die einzelnen Kollektive getrennt und eventuell notwendige Transformationen der Merkmale vorgenommen werden. Diese Ergebnisse werden von Stahlmarke zu Stahlmarke, von Werk zu Werk abhängig sein, so daß eine gegenseitige Abstimmung notwendig sein wird. Die weitere Aufgabe wird darin bestehen, die Korrelation, d. h. die Beziehung zwischen verschiedenen Merkmalen (z. B. chemische Zusammensetzung und Festigkeitseigenschaften) zu ermitteln. Dieses Sammeln von Kenntnissen und Erfahrungen wird sich unter Umständen auf viele Jahre erstrecken, und es kann im voraus gar nicht abgesehen werden, ob dieser Weg zu einer baldigen Einigung zwischen den nach verschiedenen Herstellungsverfahren arbeitenden und über eigene, besondere Erfahrungen verfügenden Werken führen wird. Jetzt schon dieser folgenreichen Entwicklung vorgreifen zu wollen, wäre nicht vertretbar und durch die bisherigen Erfahrungen auch nicht zu begründen.

Für die Beurteilung der Güte eines Stoffes im allgemeinen und des Stahles im besonderen, seiner Gebrauchseignung und der sehr wichtigen Baustellensicherheit, sind nicht allein die in den Vorschriften festgesetzten Werte der Streckgrenze, Festigkeit, Dehnung und Biegefähigkeit maßgebend, vielmehr müssen auch die übrigen Materialeigenschaften gebührend berücksichtigt werden, beispielsweise bei einem Armierungsstahl u. a.: Kontraktion, Biegevermögen ohne und mit Entlastungen bzw. Rückbiegen, Empfindlichkeit auf Oberflächenverletzungen und Korrosionsnarben, Spannungsrißkorrosion, Ermüdungs- und Dauerstandfestigkeit — Kriechen und Relaxation — auch bei zufälligen Überlastungen, Haftfestigkeit auch bei nicht ganz einwandfreier Umhüllung der Stäbe bzw. Drähte mit Beton, Kerbwirkung des Profils am Stab und Sprengwirkung im Beton, Füllvermögen der Hohlräume mit Beton bzw. Injektionsmörtel, u. a. m. Erst dieses Gesamtbild aller maßgebenden Eigenschaften in Form von wegleitenden Richtlinien statt Vorschriften liefert die für die Baustellensicherheit entscheidende Materialcharakteristik, wogegen die Überzüchtung einiger Gütewerte meist auf Kosten anderer, unter Umständen wichtigerer Werte gehen müßte.

Bei dieser Beurteilung der Gebrauchseignung eines Materials für einen bestimmten Verwendungszweck kann die sinngemäße Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung nützlich sein, sie kann aber die grundlegenden Erkenntnisse und Erfahrungen der Stoffkunde, die eine Wissenschaft und Kunst zugleich ist, nicht ersetzen. Überall dort, wo der denkende und fühlende Mensch in das Naturgeschehen eingreift, spielen auch Vernunft und Unvernunft, Glück und Unglück, Verdienst und Schuld eine Rolle, was die Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht zu erfassen vermag.

*(Eingegangen am 15. Juni 1960)*

## Die Berechnung von Trägerrosten mit Hilfe der Matrizenrechnung

Von R. Schindler, Wien

Mit 3 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Es wird gezeigt, welche Vereinfachungen sich bei der Behandlung von Trägerrostproblemen durch die Verwendung der Matrizenrechnung ergeben.

### I. Einleitung

Bereits im Jahre 1927 hat Melan in seinem gemeinsam mit Bleich herausgegebenen Buche „Die gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen der Baustatik“ die grundsätzliche Berechnungsmethode von Rosten mit Hilfe von Eigenlösungen erstmalig angegeben. Trotzdem dauerte es 12 Jahre, bis diese Berechnungsart Eingang in die Praxis des Bauingenieurs gefunden hat. Mag der Grund hierfür der für die damalige Zeit noch schwierige mathematische Stoff oder die mangelnde statische Erklärung der einzelnen Berechnungsschritte gewesen sein, jedenfalls hat man während der Zeit vor 1939 Rostberechnungen auf Modellversuche mit Drahtnetzen aufgebaut.

Nun ist seither dem Bauingenieur die Matrizenrechnung zu Hilfe gekommen. Wenn auch die Lösung von Gleichungen mit Hilfe von Matrizen sich grundsätzlich mit der bisherigen Methode mit Hilfe von Summenansätzen inhaltlich deckt, so ist



dennoch die Operation mit Matrizen wesentlich einfacher und übersichtlicher; sie gestattet hiedurch, auch für schwierigere Aufgaben leicht verständliche Lösungen zu finden.

Es soll zunächst an Hand des gewöhnlichen Trägerrostes die Lösung mit Hilfe der Matrizenrechnung vorgeführt werden. Hierbei können die uns schon bekannten statischen Erklärungen der Lösungsschritte besonders einfach und deutlich abgelesen werden. Im weiteren wollen wir dann schwierigere Rostaufgaben behandeln, deren Lösung in der vorgeführten Allgemeinheit meines Wissens noch nicht bekannt ist.

Wir beschränken uns hierbei auf Rostanordnungen, die eine Aufspaltung der Lösungen nach  $x$  und  $y$  gestatten. Demgemäß setzen wir voraus, daß die hier behandelten Roste grundsätzlich aus einer Schar paralleler Längs- und Querträger bestehen. Die äußere Belastung greift durchwegs an den Knotenpunkten des Rostes an. Belastungen zwischen den Knoten können in bekannter Weise dadurch in gleichwertige Knotenangriffskräfte übergeführt werden, daß man sich den Rost vorübergehend in den Knotenpunkten starr gelagert denkt und die zugehörigen Knotenauflagerkräfte bestimmt.

Bezüglich der Matrizenansätze sei hervorgehoben, daß wir quadratische Matrizen durch runde Klammern, rechteckige Matrizen und ein- oder mehrdimensionale Vektoren durch eckige Klammern kennzeichnen. Diagonalmatrizen werden durch griechische Buchstaben in runden Klammern kenntlich gemacht. Die Einheitsmatrizen nach  $x$  bzw.  $y$  schreiben wir mit  $(1_{xx'})$  bzw.  $(1_{y'y})$ .

Um das Lesen der folgenden Matrizen- und Vektorgleichungen zu erleichtern, werden die Matrizen und Vektoren ausführlich mit Zeigern versehen. Da die hier behandelten Roste aus zwei Scharen paralleler, in  $X$ - bzw.  $Y$ -Richtung verlaufender Träger bestehen, so sind die zugehörigen Vektoren grundsätzlich zweidimensionaler Ordnung und besitzen daher zwei Zeiger verschiedener Art, also z. B.  $[M_{xy}]$ ,  $[P_{ki}]$  usw. Die zugehörigen Matrizen können infolge der vorausgesetzten Ähnlichkeit der Trägerscharen in  $X$ - und  $Y$ -Matrizen aufgespaltet werden. Dementsprechend werden diese mit zwei Zeigern gleicher Art ausgestattet, also z. B.  $(A_{xx'})$ ,  $(B_{y'y})$  usw. Vektoren und Matrizen sind hiermit durch den grundsätzlichen Unterschied in ihrer Zeigerbezeichnung von Haus aus gekennzeichnet. Hierbei stellt der erste bzw. zweite Zeiger jeweils die Zeilen- bzw. Spaltennummer dar.

Bei der Durchführung der Rechenoperationen in Matrizen- oder Vektorgleichungen werden bekanntlich die Zeilenvektoren der jeweils links stehenden Matrizen oder Vektoren mit den Spaltenvektoren der unmittelbar rechts stehenden Matrizen oder Vektoren skalar multipliziert. Dementsprechend stimmen immer die zweiten Zeiger der links stehenden Matrizen oder Vektoren mit den ersten Zeigern der rechts stehenden Matrizen oder Vektoren überein. Diese Zeiger werden bei der Durchführung der skalaren Multiplikationen gelöscht.

## II. Einfeldträgerrost mit Trägern ohne Torsionssteifigkeit

Gliederung des Rostes gemäß Abb. 1:

$(m + 1)$  parallele Längsträger als Einfeldbalken in beliebigen Abständen  $a_y = \alpha_y \cdot a$  mit zueinander ähnlichem, aber sonst beliebigem Trägheitsmomentenverlauf:  $J_{xy} = j_x \cdot \gamma_y \cdot J$ .

$(n - 1)$  parallele Zwischenträger in beliebigen Abständen  $e_x = \varepsilon_x \cdot e$  mit zueinander ähnlichem, aber sonst beliebigem Trägheitsmomentenverlauf:  $\bar{J}_{xy} = \gamma_x \cdot j_y \cdot \bar{J}$ .

Die Endquerträger sind parallel zu den Zwischenquerträgern.

Vektor der Längsträgerknotenmomente:  $[M_{xy}]$ , Ordnung  $\left[ \begin{smallmatrix} m+1 \\ n-1 \end{smallmatrix} \right]$   
 Vektor der Querträgerknotenmomente:  $[\bar{M}_{xy}]$ , Ordnung  $\left[ \begin{smallmatrix} m-1 \\ n-1 \end{smallmatrix} \right]$   
 Vektor der Durchbiegungen:  $[z_{xy}]$ , Ordnung  $\left[ \begin{smallmatrix} m+1 \\ n-1 \end{smallmatrix} \right]$   
 Vektor der Knotenlasten:  $[P_{xy}]$ , Ordnung  $\left[ \begin{smallmatrix} m+1 \\ n-1 \end{smallmatrix} \right]$

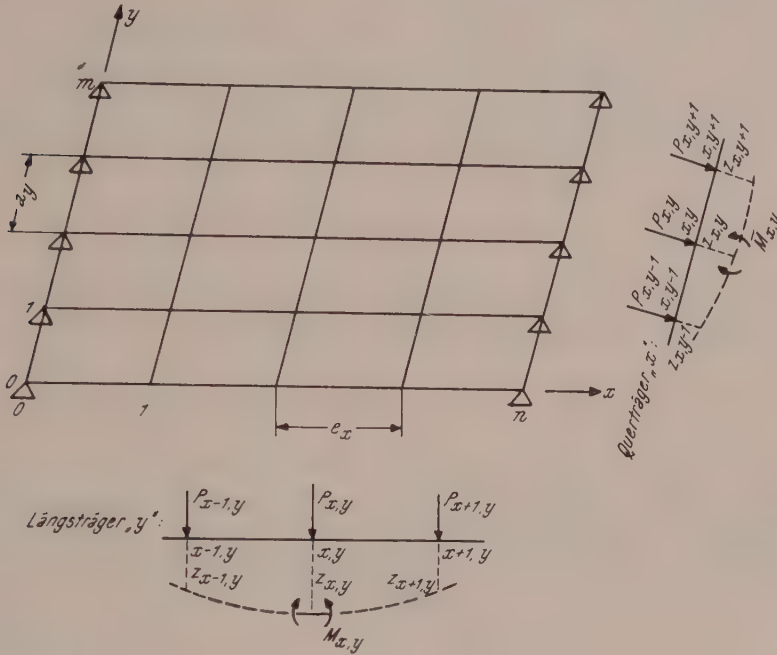


Abb. 1.

Bestimmungsgleichungen in Matrizenform

a) für die Längsträgerschar:

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^2}{EJ} (A_{xx'}) [M_{x'y'}] (\gamma_{y'y'})^{-1} - 6 (B_{xx'}) [z_{x'y'}] (1_{y'y'}) &= [0] \dots \left[ \begin{smallmatrix} m+1 \\ n-1 \end{smallmatrix} \right] \text{ Gleich.} \\ \frac{1}{e} (B_{xx'}) [M_{x'y'}] (1_{y'y'}) &= [P_{xy}^L] \dots \left[ \begin{smallmatrix} m+1 \\ n-1 \end{smallmatrix} \right] \text{ Gleich.} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

b) für die Querträgerschar:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a^2}{EJ} (\gamma_{xx'})^{-1} [\bar{M}_{x'y'}] (A_{y'y'}) - 6 (1_{xx'}) [z_{x'y'}] [B'_{y'y}] &= [0] \dots \left[ \begin{smallmatrix} m-1 \\ n-1 \end{smallmatrix} \right] \text{ Gleich.} \\ \frac{1}{a} (1_{xx'}) [\bar{M}_{x'y'}] [B_{y'y}] &= [P_{xy}^Q] \dots \left[ \begin{smallmatrix} m+1 \\ n-1 \end{smallmatrix} \right] \text{ Gleich.} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Knotengleichungen:

$$[P_{xy}^L] + [P_{xy}^Q] = [P_{xy}] \dots \left[ \begin{smallmatrix} m+1 \\ n-1 \end{smallmatrix} \right] \text{ Gleich.} \quad (3)$$

In den obigen Doppelgleichungen beinhalten bekanntlich die erste Gleichung die Kontinuitätsbedingung am Orte der Knoten (Clapeyron) bzw. die zweite Gleichung die Gleichgewichtsbedingung gegen lotrechte Verschiebung am Orte der Knoten.

In den Gleichungen sind:

$(A_{xx'})$  und  $(B_{xx'})$ : reelle, symm., quadrat. Matrizen der Ordnung  $(n - 1)$

$(A_{y'y'})$ : eine reelle, symm., quadrat. Matrix der Ordnung  $(m - 1)$

$[B_{y'y}]$ : eine Rechteckmatrix der Ordnung  $\begin{bmatrix} m+1 \\ m-1 \end{bmatrix}$

$[B'_{y'y}]$ : die hiezu transponierte Matrix

$(\gamma_{xx'})$  bzw.  $(1_{xx'})$ : eine Diagonal- bzw. die Einheitsmatrix, Ordnung  $(n - 1)$

$(\gamma_{y'y'})$  bzw.  $(1_{y'y'})$ : eine Diagonal- bzw. die Einheitsmatrix, Ordnung  $(m + 1)$

Die Variabilität der Trägerabstände  $(\varepsilon_x, \alpha_y)$  und des Trägheitsmomentenverlaufes  $(j_x, j_y)$  kommt in den Einzelgliedern der Matrizen  $A$  und  $B$  zum Ausdruck.

Sollten

$$j_x = j_y = \varepsilon_x = \alpha_y = 1$$

sein, also Träger in konstanten Abständen  $e$  bzw.  $a$  und mit konstantem Trägheitsmomentenverlauf  $\gamma_y \cdot J$  bzw.  $\gamma_x \cdot \bar{J}$ , so lauten die Matrizen z. B. für  $(n - 1) = 6$ ,  $(m - 1) = 4$ :

$$(A_{xx'}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, (B_{xx'}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, (A_{y'y'}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$[B_{y'y}] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, [B'_{y'y}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Wir erkennen augenscheinlich, daß die Variablen  $x$  und  $y$  in den Gl. (1) und (2) in getrennten Matrizen links bzw. rechts der Vektoren auftreten. Jede der Gl. (1) und (2) enthält hierbei immer mehrere Unbekannte  $M$ ,  $\bar{M}$  und  $z$ . Bei den bisherigen Lösungsmethoden hat man getrachtet, durch einen geschickten Lösungsansatz, den man entweder durch Probieren oder durch statische Überlegungen gewinnen mußte, die Anzahl der Unbekannten pro Gleichung auf Eins herabdrücken. Dieser Weg führt immer über die zugehörigen Eigenlösungsgleichungen, die man also finden mußte; denn zu jeder grundsätzlich verschiedenen Rostanordnung gehören eigene, voneinander verschiedene Eigenlösungsgleichungen. Wir werden später einige Typen dieser Gleichungen kennen lernen.

Bei Matrizenmethode hingegen findet man die zugehörigen Eigenlösungsgleichungen ohne Spekulation, indem man die Rostgleichungen nach den Regeln der Tensoralgebra weiter behandelt, wie wir dies jetzt vorführen werden.



Wir ermitteln zunächst aus den ersten der Gl. (1) und (2) die Vektoren  $M$  und  $\bar{M}$ :

$$\left. \begin{aligned} [M_{xy}] &= \frac{6 EJ}{e^2} (A_{xx'})^{-1} (B_{x'x''}) [z_{x''y'}] (\gamma_{y'y}) \\ [\bar{M}_{xy}] &= \frac{6 E \bar{J}}{e^2} (\gamma_{xx'}) [z_{x'y'}] [B'_{y'y''}] (A_{y''y'})^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Hiermit lauten die zweiten der Gl. (1) und (2):

$$\left. \begin{aligned} \frac{6 EJ}{e^3} (B_{xx'}) (A_{x'x''})^{-1} (B_{x''x'''}) [z_{x'''y'}] (\gamma_{y'y}) &= [P_{xy}^L] \\ \frac{6 EJ}{e^3} (\gamma_{xx'}) [z_{x'y'}] [B'_{y'y''}] (A_{y''y'''})^{-1} [B_{y'''y}] &= [P_{xy}^Q]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Wir setzen abkürzend:

$$\left. \begin{aligned} (B_{xx'}) (A_{x'x''})^{-1} (B_{x''x'''}) &= (D_{xx'''}) \\ [B'_{y'y''}] (A_{y''y'''})^{-1} [B_{y'''y}] &= (D_{y'y}). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Wir erkennen, daß  $(D_{xx'})$  bzw.  $(D_{y'y})$  reelle symmetrische Quadratmatrizen von der Ordnung  $(n - 1)$  bzw.  $(m + 1)$  sind. Hiermit lauten die Gl. (3):

$$\frac{6 EJ}{e^3} (D_{xx'}) [z_{x'y'}] (\gamma_{y'y}) + \frac{6 E \bar{J}}{e^3} (\gamma_{xx'}) [z_{x'y'}] (D_{y'y}) = [P_{xy}]. \quad (7)$$

Dies wäre vom Standpunkt der Matrizenrechnung aus bereits die Lösung, und zwar ergäbe sich  $[z_{xy}]$  aus der Inversen zu einer  $xy$ -Matrix, die für jedes  $J$  und  $\bar{J}$  neu zu berechnen wäre. Um dies zu vermeiden und um  $J$  und  $\bar{J}$  in der Lösung explizit zu erhalten, werden die beiden  $X$ - und die beiden  $Y$ -Matrizen der Gl. (7) durch Transformation je auf eine gemeinsame Normalform gebracht.

Man setzt zunächst nach den Regeln der Tensoralgebra:

$$(v'_{kx}) (D_{xx'}) (v_{x'k'}) = (\lambda_{kk'}). \quad (8a)$$

Hierin sind  $(v_{xk})$  ein Bündel von  $(n - 1)$  linear unabhängigen Transformationsvektoren, also  $(v_{xk})$  eine reelle, im allgemeinen unsymmetrische Quadratmatrix und  $(\lambda_{kk'})$  eine Diagonalmatrix, beide der Ordnung  $(n - 1)$ .

Derartige Transformationsansätze für  $(D_{xx'})$  gibt es unendlich viele. Man ist also auch noch in der Lage, eine zweite gleichartige Matrix, hier  $(\gamma_{xx'})$ , nach denselben Transformationsvektoren zu entwickeln. Man setzt also

$$(v'_{kx}) (\gamma_{xx'}) (v_{x'k'}) = (\mu_{kk'}). \quad (8b)$$

Aus (8a) und (8b) läßt sich nun die Transformation ermitteln. Zu diesem Zweck berechnen wir:

$$\begin{aligned} (D_{xx'}) &= (v'_{xk})^{-1} (\lambda_{kk'}) (v_{k'x'})^{-1} \\ (\gamma_{xx'})^{-1} &= (v_{xk}) (1/\mu_{kk'}) (v'_{k'x'}) \\ (\gamma_{xx'})^{-1} (D_{x'x''}) &= (v_{xk}) (\lambda_{kk'}/\mu_{kk'}) (v_{k'x''})^{-1}. \end{aligned}$$

Man kann hiebei, unbeschadet der Allgemeinheit der Lösung,

$$(\mu_{kk'}) = (1_{kk'})$$

setzen und erhält:

$$(\gamma_{xx'})^{-1} (D_{x'x''}) (v_{x''k'}) = (v_{xk}) (\lambda_{kk'}) . \quad (9)$$

Es ist dies eine homogene Gleichung in  $v_{xk}$ , die typische Form einer Eigenlösgleichung in Matrixenschrift. Sie ergibt im allgemeinen:

( $n - 1$ ) reelle Werte  $\lambda_{kk}$ , ( $k = 1, 2, \dots n - 1$ ), die sogenannten Eigenwerte, und ( $n - 1$ ) linear unabhängige Transformationsvektoren  $v_{xk}$  ( $k = 1, 2, \dots n - 1$ ), die sogenannten Eigenlösungen.

Gl. (9) stellt die zur vorliegenden Rostanordnung zugehörige Eigenlösgleichung in  $X$ -Richtung dar.

In der gleichen Art entwickeln wir in der  $Y$ -Richtung:

$$\left. \begin{aligned} (v_{i'y'}) (D_{y'y}) (v'_{yi}) &= (\lambda_{i'i}) \\ (v_{i'y'}) (\gamma_{y'y}) (v'_{yi}) &= (1_{i'i}) . \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Hieraus

$$(D_{y'y}) = (v_{y'i'})^{-1} (\lambda_{i'i}) (v'_{iy})^{-1}$$

$$(\gamma_{y'y})^{-1} = (v'_{yi}) (v_{iy})$$

$$(D_{y'y'}) (\gamma_{y'y'})^{-1} = (v_{y'i'})^{-1} (\lambda_{i'i}) (v_{iy})$$

oder

$$(v_{i'y'}) (D_{y'y'}) (\gamma_{y'y'})^{-1} = (\lambda_{i'i}) (v_{iy}) \quad (11)$$

d. i. die zur vorliegenden Rostanordnung zugehörige Eigenlösgleichung in  $Y$ -Richtung. Sie liefert im allgemeinen:

( $m + 1$ ) reelle Eigenwerte  $\lambda_{ii}$  ( $i = 1, 2, \dots m + 1$ ) und

( $m + 1$ ) linear unabhängige Transformationsvektoren  $v_{iy}$  ( $i = 1, 2, \dots m + 1$ ), die Eigenlösungen.

Mit den Transformationen (8a), (8b) und (10) gehen wir nun in die Gl. (7) und erhalten:

$$\begin{aligned} & \frac{6 EJ}{e^3} (v'_{xk})^{-1} (\lambda_{kk'}) (v_{k'k'})^{-1} [z_{x'y'}] (v_{y'i'})^{-1} (v'_{iy})^{-1} + \\ & + \frac{6 E \bar{J}}{\alpha^3} (v'_{xk})^{-1} (v_{kx'})^{-1} [z_{x'y'}] (v_{y'i'})^{-1} (\lambda_{i'i}) (v'_{iy})^{-1} = [P_{xy}] \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} & \frac{6 EJ}{e^3} (\lambda_{kk'}) (v_{k'x'})^{-1} [z_{x'y'}] (v_{y'i'})^{-1} + \frac{6 E \bar{J}}{\alpha^3} (v_{kx'})^{-1} [z_{x'y'}] (v_{y'i'})^{-1} (\lambda_{i'i}) = \\ & = (v'_{kx}) [P_{xy}] (v'_{yi}) . \end{aligned} \quad (12)$$

Setzen wir nun abkürzend:

$$(v_{kx})^{-1} [z_{xy}] (v_{yi})^{-1} = [z_{ki}] \quad (13)$$

$$(v'_{kx}) [P_{xy}] (v'_{yi}) = [P_{ki}] \quad (14)$$

so lautet Gl. (12):

$$\frac{6 EJ}{e^3} (\lambda_{kk}) [z_{ki}] + \frac{6 E \bar{J}}{\alpha^3} [z_{ki}] (\lambda_{il}) = [P_{ki}] . \quad (15)$$

Man gewinnt also für jedes  $z_{ki}$  die Beziehung

$$\left\{ \frac{6 EJ}{e^3} \lambda_{kk} + \frac{6 E \bar{J}}{a^3} \lambda_{ii} \right\} \cdot z_{ki} = P_{ki} \quad (15')$$

oder mit der Einführung:

$$\Phi = \frac{\bar{J}}{J} \left( \frac{e}{a} \right)^3 \text{ und } \varrho_{ki} = \lambda_{kk} + \Phi \cdot \lambda_{ii} \quad (16)$$

die einfache  $ki$ -Vektorgleichung:

$$\frac{6 EJ}{e^3} [z_{ki}] = \left[ \left( \frac{P}{\varrho} \right)_{ki} \right] \dots \dots \dots \left[ \frac{m+1}{n-1} \right] \text{ Werte} \quad (17)$$

und schließlich aus der Umkehrung von (13) das Resultat:

$$[z_{xy}] = \frac{e^3}{6 EJ} (v_{xk}) \left[ \left( \frac{P}{\varrho} \right)_{ki} \right] (v_{iy}). \quad (I)$$

Nun berechnen wir noch die Knotenmomente. Zu diesem Zwecke setzen wir abkürzend:

$$\left. \begin{aligned} (A_{xx'})^{-1} (B_{x'x''}) (v_{x''k}) &= (w_{xk}) \dots \dots \dots \left[ \frac{n-1}{n-1} \right] \text{ Werte} \\ (v_{iy'}) [B'_{y'y''}] (A_{y''y'''})^{-1} &= [w_{iy}] \dots \dots \dots \left[ \frac{m-1}{m+1} \right] \text{ Werte} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

und erhalten aus Gl. (4) und (I)

für die Knotenmomente der Längsträger:

$$[M_{xy}] = e \cdot (w_{xk}) \left[ \left( \frac{P}{\varrho} \right)_{ki} \right] (v_{iy'}) (\gamma_{y'y'}) \quad (II)$$

und für die Knotenmomente der Querträger:

$$[\bar{M}_{xy}] = a \cdot \Phi \cdot (\gamma_{xx'}) (v_{x'k}) \left[ \left( \frac{P}{\varrho} \right)_{ki} \right] [w_{iy}]. \quad (III)$$

Aus den Transformationsgleichungen (8a), (8b) und (10) können wir mühelos die statische Bedeutung der Transformationsschritte ablesen. Wir ersehen hieraus, daß es bei der gegenständlichen Rostanordnung  $k \cdot i$  voneinander unabhängige Einheitsverformungszustände gibt, bei denen die Durchbiegungseinheitsvektoren  $v_{kx} \cdot v_{iy}$  sowohl zu den zugehörigen Knotenkrafteinheitsvektoren der Längsträger als auch zu den zugehörigen Knotenkrafteinheitsvektoren der Querträger orthogonal sind. Infolgedessen müssen die beiden Krafteinheitsvektorenbündel zueinander parallel sein. Diese Bedingung bildet den statischen Inhalt der Eigenlösungsgleichungen (9) und (11). Da sich die Zahl der unbekannten Durchbiegungen  $z_{xy}$  mit der Anzahl obiger  $k \cdot i$ -Rostzustände deckt, so ist es möglich, jede gegebene Belastung  $P_{xy}$  in diese  $k \cdot i$  Laststufen aufzugliedern, wobei infolge der Orthogonalität derselben jede Laststufe nur eine Unbekannte  $z_{ki}$  enthält; siehe Gl. (17).  $z_{ki}$  stellt hierbei den Verformungsvektor im  $k \cdot i$ -ten Belastungszustand dar und ist einerseits dem zugehörigen Lastvektor  $P_{ki}$  direkt, andererseits dem zugehörigen Steifigkeitsvektor  $\varrho_{ki}$  indirekt proportional.

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir noch kurz auf zwei bereits bekannte Variationen des vorgeführten Verfahrens eingehen.

Man kann z. B. die Transformation der Rostgleichung (7) auf die  $Y$ -Seite beschränken. Man erhält dann mit den Gl. (10):

$$\frac{6 EJ}{e^3} (D_{xx'}) [z_{x'y'}] (v_{y'i})^{-1} (v'_{iy})^{-1} + \frac{6 E \bar{J}}{a^3} (\gamma_{xx'}) [z_{x'y'}] (v_{y'i'})^{-1} (\lambda'_{i'i}) (v'_{iy})^{-1} = [P_{xy}]$$



oder:

$$\frac{6 EJ}{e^3} (D_{xx'}) [z_{x'y'}] (v_{y'i})^{-1} + \frac{6 E \bar{J}}{\alpha^3} (\gamma_{xx'}) [z_{x'y'}] (v_{y'i'})^{-1} (\lambda_{i'i}) = [P_{xy}] (v'_{yi}). \quad (19)$$

Wir setzen nun abkürzend:

$$[z_{xy}] (v_{yi})^{-1} = [z_{xi}] \quad (20)$$

$$[P_{xy}] (v'_{yi}) = [P_{xi}]. \quad (21)$$

Hiermit lautet Gl. (19):

$$\frac{6 EJ}{e^3} (D_{xx'}) [z_{x'i}] = [P_{xi}] - \frac{6 E \bar{J}}{\alpha^3} (\gamma_{xx'}) [z_{x'i'}] (\lambda_{i'i}). \quad (22)$$

Dies sind die Bestimmungsgleichungen für einen Längsträgerstrang mit elastisch unterstützten  $(n - 1)$  Zwischenknoten in  $i$  verschiedenen Zuständen. In jedem  $i$ -Zustand ist er mit den Knotenlasten  $P_{xi}$  belastet; die zugehörige Bettungszahl im Knoten  $x$  beträgt:

$$\beta_{xi} = \frac{6 E \bar{J}}{\alpha^3} \cdot \gamma_{xx} \cdot \lambda_{ii}. \quad (23)$$

Aus (22) müssen nun die Werte von  $[z_{xi}]$  für die gegebene Belastung  $[P_{xi}]$ , Gl. (21), berechnet werden.

Das Resultat ergibt dann die Umkehrung von (20):

$$[z_{xy}] = [z_{xi}] (v_{iy}). \quad (IV)$$

In ähnlicher Form ergeben sich mit Hilfe der Gl. (4) auch die Knotenmomente in den Längsträgern:

$$[M_{xy}] = [M_{ki}] (v_{iy'}) (\gamma'_{y'y}) \quad (IV')$$

wobei:

$$[M_{ki}] = \frac{6 EJ}{e^2} (A_{xx'})^{-1} (B_{x'x''}) [z_{x''i}]$$

die Momente im elastisch gestützten  $i$ -Balken unter  $[P_{xi}]$  sind.

Knotenmomente in den Querträgern:

$$[\bar{M}_{xy}] = \frac{6 E \bar{J}}{\alpha^2} (\gamma_{xx'}) [z_{x'i}] [w_{iy}] \quad (IV'')$$

wobei  $[w_{iy}]$  aus der zweiten Gl. (18) zu entnehmen ist. Diese Art der Rostberechnung ist in dem 1942 erschienenen Buche: „Melan-Schindler: Die genaue Berechnung von Trägerrosten“, Springer-Verlag, Wien, ausführlich behandelt.

In gleicher Weise läuft die Entwicklung bei Transformation der Rostgleichungen nur nach der  $X$ -Seite. Sie ergibt, wie man ohne Ableitung erkennt, das Resultat:

$$[z_{xy}] = (v_{xk}) [z_{ky}]. \quad (V)$$

Hiebei sind  $[z_{ky}]$  die Durchbiegungen eines in den  $(m + 1)$  Knoten elastisch unterstützten Querträgerstranges in  $k$  verschiedenen Zuständen. In dem  $k$ -Zustand ist er mit den Knotenlasten:

$$[P_{ky}] = (v'_{k\bar{w}}) [P_{xy}] \quad (21a)$$

belastet; die zugehörige Bettungszahl im Knoten  $y$  beträgt:

$$\beta_{ky} = \frac{6 EJ}{e^3} \cdot \lambda_{kk} \cdot \gamma_{yy}. \quad (23a)$$

In sinngemäßer Weise wie oben folgen mit Hilfe der Gl. (4) die Knotenmomente in den Längsträgern:

$$[M_{xy}] = \frac{6 EJ}{e^3} (w_{xk}) [z_{ky'}] (\gamma_{y'y}) \quad (V')$$

wobei  $(w_{xk})$  aus der ersten Gl. (18) zu entnehmen ist.

Knotenmomente in den Querträgern:

$$[\bar{M}_{xy}] = (\gamma_{xx'}) (v_{x'k}) [\bar{M}_{ky}] \quad (V'')$$

wobei:

$$[\bar{M}_{ky}] = \frac{6 EJ}{\alpha^3} [z_{ky'}] [B'_{y'y''}] (A_{y''y})^{-1}$$

die Momente im elastisch gestützten  $k$ -Balken unter  $[P_{ky}]$  sind. Diese Art der Rostberechnung ist in dem 1951 erschienenen Buche: „Homberg: Kreuzwerke“, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, ausführlich behandelt.

### III. Durchlaufträgerrost mit Trägern ohne Torsionssteifigkeit

Die allgemeine Anordnung eines solchen Rostes zeigt Abb. 2. Er gliedert sich in:

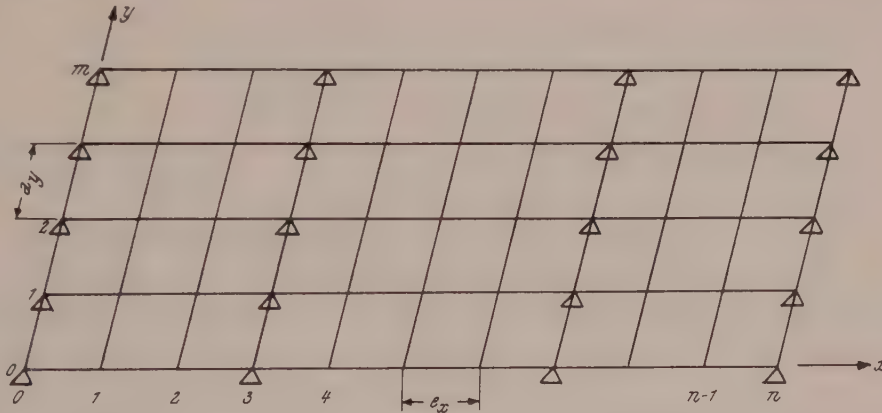


Abb. 2.

$(m + 1)$  parallele Längsträger als Durchlaufbalken in beliebigen Abständen  $a_y = \alpha_y \cdot a$  und mit zueinander ähnlichem, aber sonst beliebigem Trägheitsmomentenverlauf:  $J_{xy} = j_x \cdot \gamma_y \cdot J$

$r$  parallele Feldquerträger in beliebigen Abständen  $e_x = \varepsilon_x \cdot e$ , mit zueinander ähnlichem, aber sonst beliebigem Trägheitsmomentenverlauf:  $\bar{J}_{xy} = \gamma_x \cdot j_y \cdot \bar{J}$

$s$  hiezu parallele Querträger über den Mittelstützen und 2 hiezu parallele Querträger über den Endstützen.

Der Vektor der Längsträgerknotenmomente	$[M_{xy}]$	hat die Ordnung	$\left[ \begin{array}{c} m+1 \\ r+s \end{array} \right]$
Der Vektor der Feldquerträgerknotenmomente	$[\bar{M}_{xy}]$	hat die Ordnung	$\left[ \begin{array}{c} m-1 \\ r \end{array} \right]$
Der Vektor der Feldknotendurchbiegungen	$[z_{xy}]$	hat die Ordnung	$\left[ \begin{array}{c} m+1 \\ r \end{array} \right]$
Der Vektor der Knotenlasten	$[P_{xy}]$	hat die Ordnung	$\left[ \begin{array}{c} m+1 \\ r \end{array} \right]$

Bestimmungsgleichungen in Matrizenform

a) für die Längsträgerschar:

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^2}{EJ} (A_{xx'}) [\bar{M}_{x'y'}] (\gamma_{y'y'})^{-1} - 6 [B'_{xx'}] [z_{x'y'}] (1_{y'y'}) &= [0] \dots \left[ \begin{array}{c} m+1 \\ r+s \end{array} \right] \text{ Gleich.} \\ \frac{1}{e} [B_{xx'}] [\bar{M}_{x'y'}] (1_{y'y'}) &= [P_{xy}^L] \dots \left[ \begin{array}{c} m+1 \\ r \end{array} \right] \text{ Gleich.} \end{aligned} \right\} (24)$$

b) für die Querträgerschar:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a^2}{EJ} (\gamma_{xx'})^{-1} [\bar{M}_{x'y'}] (A_{y'y'}) - 6 (1_{xx'}) [z_{x'y'}] [B'_{y'y'}] &= [0] \dots \left[ \begin{array}{c} m-1 \\ r \end{array} \right] \text{ Gleich.} \\ \frac{1}{a} (1_{xx'}) [\bar{M}_{x'y'}] [B_{y'y'}] &= [P_{xy}^Q] \dots \left[ \begin{array}{c} m+1 \\ r \end{array} \right] \text{ Gleich.} \end{aligned} \right\} (25)$$

Knotengleichungen:

$$[P_{xy}^L] + [P_{xy}^Q] = [P_{xy}]. \quad (26)$$

In den Gleichungen sind:

$(A_{xx'})$ : eine reelle, symm., quadr. Matrix der Ordnung  $(r+s)$

$(A_{y'y'})$ : eine reelle, symm., quadr. Matrix der Ordnung  $(m-1)$

$[B_{xx'}]$ : eine Rechteckmatrix der Ordnung  $\left[ \begin{array}{c} r+s \\ r \end{array} \right]$

$[B_{y'y'}]$ : eine Rechteckmatrix der Ordnung  $\left[ \begin{array}{c} m+1 \\ m-1 \end{array} \right]$

$[B'_{xx'}]$  und  $[B'_{y'y'}]$  sind die hiezu transponierten Matrizen

$(\gamma_{xx'})$  bzw.  $(1_{xx'})$  eine Diagonal- bzw. die Einheitsmatrix der Ordnung  $r$

$(\gamma_{y'y'})$  bzw.  $(1_{y'y'})$  eine Diagonal- bzw. die Einheitsmatrix der Ordnung  $(m+1)$ .

Die Variabilität der Trägerabstände  $(\varepsilon_x, \alpha_y)$  und des Trägheitsmomentenverlaufes  $(j_x, j_y)$  kommt in den Einzelgliedern der Matrizen  $A$  und  $B$  zum Ausdruck. Sollten

$$\dot{j}_x = \dot{j}_y = \varepsilon_x = \alpha_y = 1$$

sein, also Träger in konstanten Abständen  $e$  bzw.  $a$  und mit konstantem Trägheitsmomentenverlauf  $\gamma_y \cdot J$  bzw.  $\gamma_x \cdot \bar{J}$ , so lauten die Matrizen z. B. für  $r=6, s=2, (m-1)=4$ :

$$(A_{xx'}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad [B_{xx'}] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$[B'_{xx'}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$(A_{y'y})$ ,  $[B_{y'y}]$  und  $[B'_{y'y}]$  wie auf Seite 178.

Die Durchrechnung verläuft wie in Kap. II, Seite 179, u. f.:

$$\left. \begin{aligned} [M_{xy}] &= \frac{6 EJ}{e^3} (A_{xx'})^{-1} [B'_{xx'}] [z_{x'y'}] (\gamma_{y'y}) \\ [M_{xy}] &= \frac{6 EJ}{\alpha^3} (\gamma_{xx'}) [z_{x'y'}] [B'_{y'y''}] (A_{y'y''})^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\frac{6 EJ}{e^3} [B_{xx'}] (A_{x'x''})^{-1} [B'_{x''x'''}] [z_{x''y'}] (\gamma_{y'y}) = [P_{xy}^L]$$

$$\frac{6 EJ}{\alpha^3} (\gamma_{xx'}) [z_{x'y'}] [B'_{y'y''}] (A_{y'y'''})^{-1} [B_{y''y}] = [P_{xy}^Q].$$

Wir setzen abkürzend:

$$\left. \begin{aligned} [B_{xx'}] (A_{x'x''})^{-1} [B'_{x''x'''}] &= (\bar{D}_{xx'}) \\ [B'_{y'y''}] (A_{y'y'''})^{-1} [B_{y''y}] &= (D_{y'y}) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$(\bar{D}_{xx'})$  und  $(D_{y'y})$  sind, wie man sieht, reelle, symmetrische Quadratmatrizen von der Ordnung  $r$  bzw.  $(m+1)$ .

Hiermit lautet die Rostlösungsgleichung wie auf Seite 179:

$$\frac{6 EJ}{e^3} (\bar{D}_{xx'}) [z_{x'y'}] (\gamma_{y'y}) + \frac{6 EJ}{\alpha^3} (\gamma_{xx'}) [z_{x'y'}] (D_{y'y}) = [P_{xy}] \quad (29)$$

natürlich mit einem anderen  $(\bar{D}_{xx'})$  als auf Seite 179  $(D_{xx'})$ .

Transformation von Gl. (29) wie in Kap. II. Die zugehörigen Eigenlösungsgleichungen lauten formal wie Gl. (9) und (11), ebenso die Lösung für  $[z_{xy}]$ , Gl. (14), (16) und (I).

Statt Gl. (18) setzt man hier:

$$\left. \begin{aligned} (A_{xx'})^{-1} [B'_{x'x''}] (v_{x''k}) &= [w_{xk}] \dots \dots \dots \left[ \begin{smallmatrix} r \\ r+s \end{smallmatrix} \right] \text{Werte} \\ (v_{iy'}) [B'_{y'y''}] (A_{y'y'''})^{-1} &= [w_{iy}] \dots \dots \dots \left[ \begin{smallmatrix} m-1 \\ m+1 \end{smallmatrix} \right] \text{Werte} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Die Formeln für die Knotenmomente lauten dann wie Gl. (II) und (III) auf Seite 181.

Naturgemäß können auch beim Durchlaufträgerrost die am Schluß des Kap. II angeführten Variationen der Rostberechnung angewendet werden; siehe die beiden dort erwähnten Schriften.



#### IV. Einfeldträgerrost mit torsionssteifen Trägern

Wir gehen nunmehr an einen wesentlich schwierigeren Rost, nämlich an den Rost mit torsionssteifen Längs- und Querträgern heran und werden sehen, daß auch dieser mit Hilfe der Matrizenrechnung einfach und übersichtlich zu berechnen ist, wobei die Lösungen dem Aufbau nach den Lösungen des gewöhnlichen Einfeldträgerrostes, Kap. II, grundsätzlich gleichen.

Gliederung des Rostes gemäß Abb. 3:

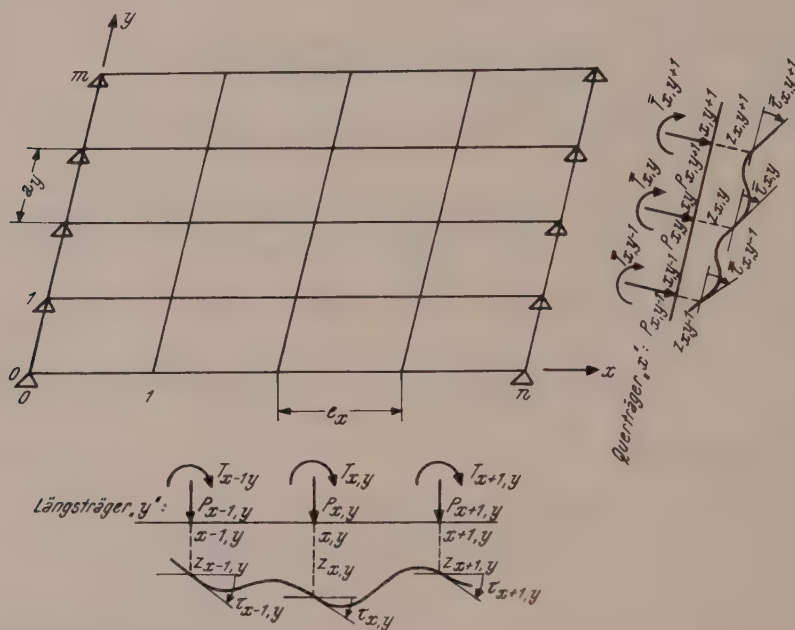


Abb. 3.

$(m + 1)$  parallele Längsträger als drehsteife Einfeldbalken in beliebigen Abständen  $a_y = \alpha_y \cdot a$  mit zueinander ähnlichem, aber sonst beliebigem Verlauf der Trägheitsmomente gegen Biegung und Verdrehung:

$$J_{xy} = j_w \cdot \gamma_y \cdot J \quad \text{und} \quad J_{xy}^D = j_w^D \cdot \gamma_y \cdot J^D$$

$(n - 1)$  parallele Zwischenquerträger, biege- und torsionssteif, in beliebigen Abständen  $e_x = \varepsilon_x \cdot e$  mit zueinander ähnlichem, aber sonst beliebigem Verlauf der Trägheitsmomente gegen Biegung und Verdrehung:

$$\bar{J}_{xy} = \gamma_w \cdot j_y \cdot \bar{J} \quad \text{und} \quad \bar{J}_{xy}^D = \gamma_w \cdot j_y^D \cdot \bar{J}^D$$

Die beiden Endquerträger sind hierzu parallel und ebenfalls biege- und torsionssteif. Mit Rücksicht auf die meist kurzen Feldspannweiten und die meist kräftige Ausbildung der Träger kann man sie genau genug als starr gegen lotrechte Biegungen betrachten. Die Berücksichtigung der tatsächlichen Biegesteifigkeit würde allerdings keine besonderen Schwierigkeiten bereiten, erscheint aber meist überflüssig. Dagegen muß die tatsächliche Drehsteifigkeit der Endquerträger zumeist in Rechnung gestellt werden.

Als statisch Unbekannte wählt man zweckmäßigerweise die Knotendrehwinkel und Knotendurchbiegungen. Gemäß den obigen Ausführungen über die Endquerträger haben wir:

- $(n + 1)$ .  $(m - 1)$  Knotenverdrehungen  $\tau_{xy}$  in Längsrichtung,
- $(n - 1)$ .  $(m - 1)$  Knotenverdrehungen  $\bar{\tau}_{xy}$  in Querrichtung,
- $(n - 1)$ .  $(m - 1)$  Knotendurchbiegungen  $z_{xy}$  der Feldknoten.

Als äußere Knotenangriffsbelastungen setzen wir allgemein an:

- $(n + 1)$ .  $(m - 1)$  Knotendrehmomente  $T_{xy}$  in Längsrichtung,
- $(n - 1)$ .  $(m - 1)$  Knotendrehmomente  $\bar{T}_{xy}$  in Querrichtung,
- $(n - 1)$ .  $(m - 1)$  lotrechte Knotenlasten  $P_{xy}$  in den Feldknoten.

Der positiv angenommene Sinn der Kräfte und Verformungen ist aus Abb. 3 ersichtlich.

Abkürzungen:

$$\eta = \frac{G J^D}{6 E \bar{J}} ; \quad \bar{\eta} = \frac{G \bar{J}^D}{6 E J} \quad (31)$$

Allgemeine Bestimmungsgleichungen der Längsträger:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{3} (\bar{A}_{xx}') [\tau_{x'y'}] (\gamma_{y'y}) + [C'_{xx'}] \left[ \left( \frac{z}{e} \right)_{x'y'} \right] (\gamma_{y'y}) &= \frac{e}{6 E J} [T_{xy}^L] \left[ \frac{m+1}{n+1} \right] \text{ Gl.} \\ [C_{xx'}] [\tau_{x'y'}] (\gamma_{y'y}) + 2 (B_{xx'}) \left[ \left( \frac{z}{e} \right)_{x'y'} \right] (\gamma_{y'y}) &= \frac{e}{6 E J} [e \cdot P_{xy}^L] \left[ \frac{m+1}{n-1} \right] \text{ Gl.} \\ \eta (B_{xx'}) [\bar{\tau}_{x'y'}] (\gamma_{y'y}) &= \frac{e}{6 E J} [\bar{T}_{xy}^L] \left[ \frac{m+1}{n-1} \right] \text{ Gl.} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Allgemeine Bestimmungsgleichungen der Querträger:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\eta} \cdot (\gamma_{xx}') [\tau_{x'y'}] (B_{y'y}) &= \frac{a}{6 E \bar{J}} [T_{xy}^Q] \left[ \frac{m+1}{n+1} \right] \text{ Gl.} \\ \frac{e}{a} (\gamma_{xx}') [\bar{\tau}_{x'y'}] (C_{y'y}) + 2 \left( \frac{e}{a} \right)^2 (\gamma_{xx}') \left[ \left( \frac{z}{e} \right)_{x'y'} \right] (B_{y'y}) &= \frac{a}{6 E \bar{J}} [e \cdot P_{xy}^Q] \left[ \frac{m+1}{n-1} \right] \text{ Gl.} \\ \frac{1}{3} (\gamma_{xx}') [\tau_{x'y'}] (\bar{A}_{y'y}) + \frac{e}{a} (\gamma_{xx}') \left[ \left( \frac{z}{e} \right)_{x'y'} \right] (C'_{y'y}) &= \frac{a}{6 E \bar{J}} [\bar{T}_{xy}^Q] \left[ \frac{m+1}{n-1} \right] \text{ Gl.} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Knotengleichungen:

$$\left. \begin{aligned} [T_{xy}^L] + [T_{xy}^Q] &= [T_{xy}] \dots \dots \dots \left[ \frac{m+1}{n+1} \right] \text{ Gleich.} \\ [e \cdot P_{xy}^L] + [e \cdot P_{xy}^Q] &= [e \cdot P_{xy}] \dots \dots \dots \left[ \frac{m+1}{n-1} \right] \text{ Gleich.} \\ [\bar{T}_{xy}^L] + [\bar{T}_{xy}^Q] &= [\bar{T}_{xy}] \dots \dots \dots \left[ \frac{m+1}{n-1} \right] \text{ Gleich.} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

In den Gl. (32) und (33) sind:

$(\bar{A}_{xx}')$  bzw.  $(B_{xx}')$ : reelle, symm., quadr. Matrizen der Ordnung  $(n + 1)$  bzw.  $(n - 1)$ ,

$(\bar{A}_{y'y})$  und  $(B_{y'y})$ : reelle, symm., quadr. Matrizen der Ordnung  $(m + 1)$ ,

$[C_{xx'}]$  bzw.  $[C'_{xx'}]$ : Rechteckmatrix der Ordnung  $\left[ \frac{n+1}{n-1} \right]$  bzw. die Transponierte hiezu,

$(C_{y'y})$  bzw.  $(C'_{y'y})$ : unsymm. Quadratmatrix der Ordnung  $(m+1)$  bzw. die Transponierte hiezu,

$(\gamma_{xx}^*)$  bzw.  $(\gamma_{xx'})$ : eine Diagonalmatrix der Ordnung  $(n+1)$  bzw.  $(n-1)$

$(\gamma_{y'y})$ : eine Diagonalmatrix der Ordnung  $(m+1)$ .

Die Variabilität der Trägerabstände  $(\varepsilon_x, \alpha_y)$  und des Trägheitsmomentenverlaufes  $(j_x, j_y, j_x^D, j_y^D)$  kommt in den Einzelgliedern der Matrizen  $\bar{A}$ ,  $B$  und  $C$  zum Ausdruck. Sollten:

$$j_x = j_y = j_x^D = j_y^D = \varepsilon_x = \alpha_y = 1$$

sein, als Träger in konstantem Abstand  $e$  bzw.  $a$  und mit konstantem Trägheitsmomentenverlauf  $\gamma_y J$ ,  $\gamma_x \cdot \bar{J}$  bzw.  $\gamma_y' J^D$ ,  $\gamma_x \cdot \bar{J}^D$ , so lauten die Matrizen z. B.

für  $(n-1) = 4$ ,  $(n+1) = 6$ ,  $(m+1) = 4$ :

$$\begin{aligned} (\bar{A}_{xx}^*) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (B_{xx'}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \\ [C'_{xx'}] &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad [C_{xx'}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \\ (\bar{A}_{y'y}) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (B_{y'y}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \\ (C'_{y'y}) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad (C_{y'y}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da in Gl. (32) und (33) die Variablen  $x$  und  $y$  durchwegs getrennt auftreten, muß auch beim Torsionsrost eine Aufspaltung der Lösungen in  $x \cdot y$ -Produkte möglich sein. Da aber die Längs- und Querträger des Torsionsrostes im Gegensatz zum torsionsfreien Rost in drei verschiedenen Kraftarten ( $T$ ,  $P$ ,  $\bar{T}$ ) in den Knoten aufeinander wirken, so ist eine unmittelbare Elimination einer der drei Unbekanntengruppen ( $\tau$ ,  $z$ ,  $\bar{\tau}$ ) ohne Verlust obiger  $x \cdot y$ -Trennung nicht möglich.

Wir schreiben nun die Gl. (32) und (33) in geordneter Matrizenschreibweise an. Wir haben hierbei drei Zähltypen, nämlich  $x$ ,  $y$  und  $(\tau, z, \bar{\tau})$ , also räumliche Matrizen.

In korrekter Matrizenschreibweise wird die dritte Zählvariable z. B. mit „ $r$ “ bezeichnet, also angesetzt:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= u_{r=1, xy}; & z_{xy} &= u_{r=2, xy}; & \bar{\tau}_{xy} &= u_{r=3, xy} \\ T_{xy} &= S_{r=1, xy}; & P_{xy} &= S_{r=2, xy}; & \bar{T}_{xy} &= S_{r=3, xy} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

und die Vektorgleichung (32) oder (33) lautet dann allgemein:

$$(M_{rxy, r'x'y'}) \cdot [u_{r'x'y'}] = [S_{rxy}]. \quad (36)$$

Wie wir aus Gl. (32) und (33) ersehen, enthält jedes Einzelglied der Matrix  $M$  für irgend ein  $(r, x, y)$  zu jedem  $r'$  ein Produkt:  $a_{xx'} \cdot a_{y'y'}$ .

Um für die weitere Entwicklung anschaulich zu sein, wollen wir die  $x'$ - bzw.  $y'$ -Anteile getrennt links bzw. rechts vom Vektor  $[\tau, z, \bar{\tau}]$  anschreiben, müssen aber dann die  $r$ - und  $r'$ -Zeiger doppelt ansetzen und beachten, daß in jeder Vektorgleichung nach Art der Gl. (36) immer nur gleiche  $r$ - und  $r'$ -Glieder abschnittsweise multipliziert werden dürfen.

Wir schreiben also eine derartige Vektorgleichung allgemein wie folgt an:

$$\begin{matrix} r'=1 & 2 & 3 \\ r=1 & \begin{pmatrix} (a_{xx'}) & (b_{xx'}) & (c_{xx'}) \\ (b_{xx'}) & (a_{xx'}) & (d_{xx'}) \\ (c_{xx'}) & (d_{xx'}) & (a_{xx'}) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} u_{r'=1, x'y'} \\ u_{r'=2, x'y'} \\ u_{r'=3, x'y'} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (a_{y'y}) & (b_{y'y}) & (c_{y'y}) \\ (b_{y'y}) & (a_{y'y}) & (d_{y'y}) \\ (c_{y'y}) & (d_{y'y}) & (a_{y'y}) \end{pmatrix} & \begin{matrix} r'=1 \\ r'=2 \\ r'=3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} S_{r=1, xy} \\ S_{r=2, xy} \\ S_{r=3, xy} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (37)$$

Es ergibt sich dann z. B.  $S_{r=2, xy}$ :

$$[S_{2xy}] = (b_{xx'}) [u_{1x'y'}] (b_{y'y}) + (a'_{xx'}) [u_{2x'y'}] (a'_{y'y}) + (d_{xx'}) [u_{3x'y'}] (d_{y'y}) \quad (38)$$

Gl. (32) und (33) in der Schreibweise (37) und (38) lauten nunmehr:

$$\left. \begin{aligned} & \begin{matrix} r'=1 & 2 & 3 \\ r=1 & \begin{pmatrix} 1/3 (\bar{A}_{xx'}) & 2 [C'_{xx'}] & [0] \\ 2 [C_{xx'}] & 2 (B_{xx'}) & (0) \\ [0] & (0) & \eta (B_{xx'}) \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} \tau_{x'y'} \\ \left(\frac{z}{e}\right)_{x'y'} \\ \bar{\tau}_{x'y'} \end{bmatrix} & \begin{matrix} r'=1 & 2 & 3 \\ \begin{pmatrix} (\gamma_{y'y}) & \left(\frac{1}{2} (\gamma_{y'y})\right) & (0) \\ \frac{1}{2} (\gamma_{y'y}) & (\gamma_{y'y}) & (0) \\ (0) & (0) & (\gamma_{y'y}) \end{pmatrix} & \end{matrix} \end{matrix} \\ & \begin{matrix} r'=1 & 2 & 3 \\ r=1 & \begin{pmatrix} (\gamma_{xx'}) & [0] & [0] \\ [0] & (\gamma_{xx'}) & \left(\frac{1}{2} \gamma_{xx'}\right) \\ [0] & \left(\frac{1}{2} \gamma_{xx'}\right) & (\gamma_{xx'}) \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} \tau_{x'y'} \\ \left(\frac{z}{e}\right)_{x'y'} \\ \bar{\tau}_{x'y'} \end{bmatrix} & \begin{matrix} r'=1 & 2 & 3 \\ \begin{pmatrix} \bar{\eta} (B_{y'y}) & (0) & (0) \\ (0) & 2 \left(\frac{e}{\alpha}\right)^2 (B_{y'y}) & 2 \frac{e}{\alpha} (C_{y'y}) \\ (0) & 2 \left(\frac{e}{\alpha}\right) (C'_{y'y}) & \frac{1}{3} (\bar{A}_{y'y}) \end{pmatrix} & \end{matrix} \end{matrix} \\ & \begin{matrix} r=1 & 2 & 3 \\ r=1 & \begin{bmatrix} T_{xy}^L \\ e \cdot P_{xy}^L \\ \bar{T}_{xy}^L \end{bmatrix} & \begin{matrix} r=1 \\ r=2 \\ r=3 \end{matrix} \end{matrix} \\ & \begin{matrix} r=1 & 2 & 3 \\ r=1 & \begin{bmatrix} T_{xy}^Q \\ e \cdot P_{xy}^Q \\ \bar{T}_{xy}^Q \end{bmatrix} & \begin{matrix} r=1 \\ r=2 \\ r=3 \end{matrix} \end{matrix} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Wir haben hierbei die  $\gamma$ -Matrizen durch Einführung des willkürlich gewählten Faktors  $1/2$  regulär gemacht und dies in den benachbarten Matrizen ausgeglichen. Die  $X$ -Gesamtmatrizen bzw. die  $Y$ -Gesamtmatrizen sind regulär, symmetrisch von der Ordnung  $[(n+1) + 2(n-1)] = (3n-1)$  bzw.  $3(m+1)$ . Sie enthalten nur Zahlen- und dimensionslose Verhältnisswerte  $\eta, \bar{\eta}, \frac{e}{\alpha}, \gamma_{xx'}$  und  $\gamma_{y'y}$ , die entweder bekannt sind oder vorher geschätzt werden müssen.



Der weitere Weg erfolgt nun in der aus Kap. II bereits bekannten Art.

Wir transformieren zunächst die  $X$ -Matrizen der Gl. (39) und (40) nach  $r$  und  $k$ , wobei wir beachten, daß  $r$  von 1 bis 3 und  $k$  für  $r = 1$  von 1 bis  $(n + 1)$  bzw. für  $r = 2$  und 3 je von 1 bis  $(n - 1)$  reichen. Die Transformation erfolgt grundsätzlich in gleicher Art wie in Gl. (8a) und (8b) des Kap. II. Hierbei führen wir statt der einen  $r$ -Zählung Buchstaben ein; es gehört  $w$  zu  $\tau$  und  $T, v$  zu  $\frac{z}{e}$  und  $P, \bar{w}$  zu  $\bar{\tau}$  und  $\bar{T}$ .

$$\begin{pmatrix} (w'_{kx})_{r=1} & [v'_{kx}]_1 & [\bar{w}'_{kx}]_1 \\ [w'_{kx}]_{r=2} & (v'_{kx})_2 & (\bar{w}'_{kx})_2 \\ [w'_{kx}]_{r=3} & (v'_{kx})_3 & (\bar{w}'_{kx})_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} (\bar{A}^*_{xx'}) & 2 [C'_{xx'}] & [0] \\ 2 [C'_{xx'}] & 2 (B_{xx'}) & (0) \\ [0] & (0) & \eta (B_{xx'}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (w_{x'k})_{r'=1} & [w_{x'k}]_2 & [w_{x'k}]_3 \\ [v_{x'k}]_{r'=1} & (v_{x'k})_2 & (v_{x'k})_3 \\ [\bar{w}_{x'k}]_{r'=1} & \bar{w}_{(x'k)_2} & \bar{w}_{(x'k)_3} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} (\lambda^*_{kk})_1 & [0] & [0] \\ [0] & (\lambda_{kk})_2 & (0) \\ [0] & (0) & (\lambda_{kk})_3 \end{pmatrix} \quad (41)$$

$$\begin{pmatrix} (w'_{kx})_1 & [v'_{kx}]_1 & [\bar{w}'_{kx}]_1 \\ [w'_{kx}]_2 & (v'_{kx})_2 & (\bar{w}'_{kx})_2 \\ [w'_{kx}]_3 & (v'_{kx})_3 & (\bar{w}'_{kx})_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\gamma^*_{xx'}) & [0] & [0] \\ [0] & (\gamma_{xx'}) & \left(\frac{1}{2} \gamma_{xx'}\right) \\ [0] & \left(\frac{1}{2} \gamma_{xx'}\right) & (\gamma_{xx'}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (w_{x'k})_1 & [w_{x'k}]_2 & [w_{x'k}]_3 \\ [v_{x'k}]_1 & (v_{x'k})_2 & (v_{x'k})_3 \\ [\bar{w}_{x'k}]_1 & (\bar{w}_{x'k})_2 & (\bar{w}_{x'k})_3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} (1^*_{kk}) & [0] & [0] \\ [0] & (1_{kk}) & (0) \\ [0] & (0) & (1_{kk}) \end{pmatrix} \quad (42)$$

Die Inverse zur  $\gamma$ -Matrix lautet:

$$\begin{pmatrix} (\gamma^*_{xx'}) & [0] & [0] \\ [0] & (\gamma_{xx'}) & \left(\frac{1}{2} \gamma_{xx'}\right) \\ [0] & \left(\frac{1}{2} \gamma_{xx'}\right) & (\gamma_{xx'}) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 (\gamma^*_{xx'})^{-1} & [0] & [0] \\ [0] & 4 (\gamma_{xx'})^{-1} - 2 (\gamma_{xx'})^{-1} \\ [0] & -2 (\gamma_{xx'})^{-1} & 4 (\gamma_{xx'})^{-1} \end{pmatrix} \quad (43)$$

Folglich lautet die zugehörige Eigenlösungsgleichung des Torsionsrostes in  $X$ -Richtung in Anlehnung an Gl. (9), Kap. II:

$$\begin{pmatrix} 3 (\gamma^*_{xx'})^{-1} & [0] & [0] \\ [0] & 4 (\gamma_{xx'})^{-1} - 2 (\gamma_{xx'})^{-1} \\ [0] & -2 (\gamma_{xx'})^{-1} & 4 (\gamma_{xx'})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} (\bar{A}^*_{x'x'}) & 2 [C'_{x'x'}] & [0] \\ 2 [C'_{x'x'}] & 2 (B_{x'x'}) & (0) \\ [0] & (0) & \eta (B_{x'x'}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (w_{x''k})_1 & [w_{x''k}]_2 & [w_{x''k}]_3 \\ [v_{x''k}]_1 & (v_{x''k})_2 & (v_{x''k})_3 \\ [\bar{w}_{x''k}]_1 & (\bar{w}_{x''k})_2 & (\bar{w}_{x''k})_3 \end{pmatrix} = \\ = 3 \cdot \begin{pmatrix} (w_{xk})_1 & [w_{xk}]_2 & [w_{xk}]_3 \\ [v_{xk}]_1 & (v_{xk})_2 & (v_{xk})_3 \\ [\bar{w}_{xk}]_1 & (\bar{w}_{xk})_2 & (\bar{w}_{xk})_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\lambda^*_{kk})_1 & [0] & [0] \\ [0] & (\lambda_{kk})_2 & (0) \\ [0] & (0) & (\lambda_{kk})_3 \end{pmatrix} \quad (44)$$

Hieraus gewinnen wir  $(n + 1)$  Eigenwerte  $(\lambda^*_{kk})_1$  und je  $(n - 1)$  Eigenwerte  $(\lambda_{kk})_2$  und  $(\lambda_{kk})_3$ , weiters  $(n + 1) \cdot (3n - 1)$  Eigenlösungen  $(w_{xk})_r$  sowie je  $(n - 1) \cdot (3n - 1)$  Eigenlösungen  $(v_{xk})_r$  und  $(\bar{w}_{xk})_r$ .

Nun transformieren wir in Anlehnung an Gl. (10) und (11), Kap. II, die  $Y$ -Matrizen per Gl. (39) und (40) nach  $r$  und  $i$ , wobei wir beachten, daß  $r$  von 1 bis 3 und  $i$  je  $r$  von

1 bis  $(m + 1)$  reichen. Hierbei führen wir auch hier statt der einen  $r$ -Zählung Buchstaben ein; es gehört  $\bar{w}$  zu  $\tau$  und  $T$ ,  $v$  zu  $\frac{z}{e}$  und  $P$ ,  $w$  zu  $\bar{\tau}$  und  $\bar{T}$ .

$$\begin{pmatrix} (w_{iy'})_{r=1} & (v_{iy'})_1 & (\bar{w}_{iy'})_1 \\ (w_{iy'})_{r=2} & (v_{iy'})_2 & (\bar{w}_{iy'})_2 \\ (w_{iy'})_{r=3} & (v_{iy'})_3 & (\bar{w}_{iy'})_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\eta} (B_{y'y}) & (0) & (0) \\ (0) & 2 \left( \frac{e}{\alpha} \right)^2 (B_{y'y}) & 2 \frac{e}{\alpha} (C_{y'y}) \\ (0) & 2 \left( \frac{e}{\alpha} \right) (C_{y'y}) & \frac{1}{3} (\bar{A}_{y'y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (w'_{yi})_{r'=1} & (w'_{yi})_2 & (w'_{yi})_3 \\ (v'_{yi})_{r'=1} & (v'_{yi})_2 & (v'_{yi})_3 \\ (\bar{w}'_{yi})_{r'=1} & (\bar{w}'_{yi})_2 & (\bar{w}'_{yi})_3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} (\lambda_{ii})_1 & (0) & (0) \\ (0) & (\lambda_{ii})_2 & (0) \\ (0) & (0) & (\lambda_{ii})_3 \end{pmatrix} \quad (45)$$

$$\begin{pmatrix} (w_{iy'})_{r=1} & (v_{iy'})_1 & (\bar{w}_{iy'})_1 \\ (w_{iy'})_{r=2} & (v_{iy'})_2 & (\bar{w}_{iy'})_2 \\ (w_{iy'})_{r=3} & (v_{iy'})_3 & (\bar{w}_{iy'})_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\gamma_{y'y}) \left( \frac{1}{2} \gamma_{y'y} \right) & (0) \\ \left( \frac{1}{2} \gamma_{y'y} \right) & (\gamma_{y'y}) & (0) \\ (0) & (0) & (\gamma_{y'y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (w'_{yi})_{r'=1} & (w'_{yi})_2 & (w'_{yi})_3 \\ (v'_{yi})_{r'=1} & (v'_{yi})_2 & (v'_{yi})_3 \\ (\bar{w}'_{yi})_{r'=1} & (\bar{w}'_{yi})_2 & (\bar{w}'_{yi})_3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} (1_{ii})_1 & (0) & (0) \\ (0) & (1_{ii})_2 & (0) \\ (0) & (0) & (1_{ii})_3 \end{pmatrix} \quad (46)$$

Die Inverse zur  $\gamma$ -Matrix lautet:

$$\begin{pmatrix} (\gamma_{y'y}) \left( \frac{1}{2} \gamma_{y'y} \right) & (0) \\ \left( \frac{1}{2} \gamma_{y'y} \right) & (\gamma_{y'y}) & (0) \\ (0) & (0) & (\gamma_{y'y}) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 (\gamma_{y'y})^{-1} - 2 (\gamma_{y'y})^{-1} & (0) \\ -2 (\gamma_{y'y})^{-1} & 4 (\gamma_{y'y})^{-1} & (0) \\ (0) & (0) & 3 (\gamma_{y'y})^{-1} \end{pmatrix} \quad (47)$$

Folglich lautet die zugehörige Eigenlösungsgleichung des Torsionsrostes in  $Y$ -Richtung in Anlehnung an Gl. (11), Kap. II:

$$\begin{pmatrix} (w_{iy'})_{r=1} & (v_{iy'})_1 & (\bar{w}_{iy'})_1 \\ (w_{iy'})_{r=2} & (v_{iy'})_2 & (\bar{w}_{iy'})_2 \\ (w_{iy'})_{r=3} & (v_{iy'})_3 & (\bar{w}_{iy'})_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\eta} (B_{y'y''}) & (0) & (0) \\ (0) & 2 \left( \frac{e}{\alpha} \right)^2 (B_{y'y''}) & 2 \frac{e}{\alpha} (C_{y'y''}) \\ (0) & 2 \frac{e}{\alpha} (C_{y'y''}) & \frac{1}{3} (\bar{A}_{y'y''}) \end{pmatrix} \cdot \\ \cdot \begin{pmatrix} 4 (\gamma_{y''y})^{-1} - 2 (\gamma_{y''y})^{-1} & (0) \\ -2 (\gamma_{y''y})^{-1} & 4 (\gamma_{y''y})^{-1} & (0) \\ (0) & (0) & 3 (\gamma_{y''y})^{-1} \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} (\lambda_{ii})_1 & (0) & (0) \\ (0) & (\lambda_{ii})_2 & (0) \\ (0) & (0) & (\lambda_{ii})_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (w_{iy})_{r=1} & (v_{iy})_1 & (\bar{w}_{iy})_1 \\ (w_{iy})_{r=2} & (v_{iy})_2 & (\bar{w}_{iy})_2 \\ (w_{iy})_{r=3} & (v_{iy})_3 & (\bar{w}_{iy})_3 \end{pmatrix} \quad (48)$$

Hieraus gewinnen wir  $3(m + 1)$  Eigenwerte  $(\lambda_{ii})_1, (\lambda_{ii})_2, (\lambda_{ii})_3$ , weiters je  $3(m + 1)^2$  Eigenlösungen  $(w_{iy})_r, (v_{iy})_r$  und  $(\bar{w}_{iy})_r$ .

In Anlehnung an Gl. (13), Kap. II, setzen wir abkürzend:

$$\begin{pmatrix} (w_{kx})_1 & [w_{kx}]_2 & [w_{kx}]_3 \\ [v_{kx}]_1 & (v_{kx})_2 & (v_{kx})_3 \\ [\bar{w}_{kx}]_1 & (\bar{w}_{kx})_2 & (\bar{w}_{kx})_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \left( \frac{z}{e} \right)_{xy} \\ \bar{\tau}_{xy} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (w_{yi})_1 & (v_{yi})_1 & (\bar{w}_{yi})_1 \\ (w_{yi})_2 & (v_{yi})_2 & (\bar{w}_{yi})_2 \\ (w_{yi})_3 & (v_{yi})_3 & (\bar{w}_{yi})_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} [u_{ki}]_{r=1} \\ [u_{ki}]_{r=2} \\ [u_{ki}]_{r=3} \end{bmatrix} \quad (49)$$

und in Anlehnung an Gl. (14), Kap. II:

$$\begin{pmatrix} (w'_{kx})_1 & [v'_{kx}]_1 & [\bar{w}'_{kx}]_1 \\ [w'_{kx}]_2 & (v'_{kx})_2 & (\bar{w}'_{kx})_2 \\ [w'_{kx}]_3 & (v'_{kx})_3 & (\bar{w}'_{kx})_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} [T_{xy}] \\ [e \cdot P_{xy}] \\ [\bar{T}_{xy}] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (w'_{yi})_1 & (w'_{yi})_2 & (w'_{yi})_3 \\ (v'_{yi})_1 & (v'_{yi})_2 & (v'_{yi})_3 \\ (\bar{w}'_{yi})_1 & (\bar{w}'_{yi})_2 & (\bar{w}'_{yi})_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [S_{ki}]_{r=1} \\ [S_{ki}]_{r=2} \\ [S_{ki}]_{r=3} \end{bmatrix} \quad (50)$$

Man beachte dabei die Multiplikationsvorschrift, Gl. (38); es ist also:

$$\left. \begin{aligned} [S_{ki}]_{r=1} &= (w'_{kx})_1 [T_{xy}] (w'_{yi})_1 + [v'_{kx}]_1 [e \cdot P_{xy}] (v'_{yi})_1 + [\bar{w}'_{kx}]_1 [\bar{T}_{xy}] (\bar{w}'_{yi})_1 \\ [S_{ki}]_{r=2} &= [w'_{kx}]_2 [T_{xy}] (w'_{yi})_2 + (v'_{kx})_2 [e \cdot P_{xy}] (v'_{yi})_2 + (\bar{w}'_{kx})_2 [\bar{T}_{xy}] (\bar{w}'_{yi})_2 \\ [S_{ki}]_{r=3} &= [w'_{kx}]_3 [T_{xy}] (w'_{yi})_3 + (v'_{kx})_3 [e \cdot P_{xy}] (v'_{yi})_3 + (\bar{w}'_{kx})_3 [\bar{T}_{xy}] (\bar{w}'_{yi})_3 \end{aligned} \right\} \quad (50a)$$

Wir ersehen hieraus die früher erwähnte Zugehörigkeit von

$(w'_{kx})$  und  $(w'_{yi})$  zu  $[T_{xy}]$ , von  $(v'_{kx})$  und  $(v'_{yi})$  zu  $[P_{xy}]$ , von  $(\bar{w}'_{kx})$  und  $(\bar{w}'_{yi})$  zu  $[\bar{T}_{xy}]$ .

Mit diesen Abkürzungen ergeben die Gl. (39), (40) und (34), ähnlich wie in Gl. (15), Kap. II:

$$\frac{6 EJ}{e} \begin{pmatrix} (\lambda_{kk}^*)_1 & [0] & [0] \\ [0] & (\lambda_{kk})_2 & (0) \\ [0] & (0) & (\lambda_{kk})_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} [u_{ki}]_1 \\ [u_{ki}]_2 \\ [u_{ki}]_3 \end{bmatrix} + \frac{6 EJ}{a} \begin{bmatrix} [u_{ki}]_1 \\ [u_{ki}]_2 \\ [u_{ki}]_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (\lambda_{ii})_1 & (0) & (0) \\ (0) & (\lambda_{ii})_2 & (0) \\ (0) & (0) & (\lambda_{ii})_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [S_{ki}]_1 \\ [S_{ki}]_2 \\ [S_{ki}]_3 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Wir führen nun ähnlich wie in Gl. (16), Kap. II, ein:

$$\Phi' = \frac{\bar{J}}{J} \cdot \frac{e}{a} \text{ und } \varrho'_{ki,r} = (\lambda_{kk} + \Phi' \cdot \lambda_{ii})_r, \quad r = 1, 2, 3 \quad (52)$$

und erhalten die einfache  $[ki]_r$ -Vektorgleichung:

$$\frac{6 EJ}{e} \cdot \begin{bmatrix} [u_{ki}]_1 \\ [u_{ki}]_2 \\ [u_{ki}]_3 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{pmatrix} S \\ \varrho' \end{pmatrix}_{ki,1} \right] \dots \dots \dots \left[ \frac{m+1}{n+1} \right] \text{ Werte} \\ \left[ \begin{pmatrix} S \\ \varrho' \end{pmatrix}_{ki,2} \right] \dots \dots \dots \left[ \frac{m+1}{n-1} \right] \text{ Werte} \\ \left[ \begin{pmatrix} S \\ \varrho' \end{pmatrix}_{ki,3} \right] \dots \dots \dots \left[ \frac{m+1}{n-1} \right] \text{ Werte} \end{array} \right\} \quad (53)$$

und schließlich aus der Umkehrung von Gl. (49) das Resultat:

$$\begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \begin{pmatrix} z \\ e \end{pmatrix}_{xy} \\ \bar{\tau}_{xy} \end{bmatrix} = \frac{e}{6 EJ} \begin{pmatrix} (w_{xk})_1 & [w_{xk}]_2 & [w_{xk}]_3 \\ [v_{xk}]_1 & (v_{xk})_2 & (v_{xk})_3 \\ [\bar{w}_{xk}]_1 & (\bar{w}_{xk})_2 & (\bar{w}_{xk})_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \left[ \begin{pmatrix} S \\ \varrho' \end{pmatrix}_{ki,1} \right] \\ \left[ \begin{pmatrix} S \\ \varrho' \end{pmatrix}_{ki,2} \right] \\ \left[ \begin{pmatrix} S \\ \varrho' \end{pmatrix}_{ki,3} \right] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (w_{iy})_1 & (v_{iy})_1 & (\bar{w}_{iy})_1 \\ (w_{iy})_2 & (v_{iy})_2 & (\bar{w}_{iy})_2 \\ (w_{iy})_3 & (v_{iy})_3 & (\bar{w}_{iy})_3 \end{pmatrix} \quad (54)$$

Man beachte wieder hiebei das Multiplikationsgesetz, Gl. (38). Es ist also:

$$\left. \begin{aligned} [\tau_{xy}] &= \frac{e}{6 EJ} \left\{ (w_{xk})_1 \left[ \begin{pmatrix} S \\ \varrho' \end{pmatrix}_{ki,1} \right] (w_{iy})_1 + [w_{xk}]_2 \left[ \begin{pmatrix} S \\ \varrho' \end{pmatrix}_{ki,2} \right] (w_{iy})_2 + [w_{xk}]_3 \left[ \begin{pmatrix} S \\ \varrho' \end{pmatrix}_{ki,3} \right] (w_{iy})_3 \right\} \\ [z_{xy}] &= \frac{e^2}{6 EJ} \left\{ [v_{xk}]_1 \left[ \begin{pmatrix} S \\ \varrho' \end{pmatrix}_{ki,1} \right] (v_{iy})_1 + (v_{xk})_2 \left[ \begin{pmatrix} S \\ \varrho' \end{pmatrix}_{ki,2} \right] (v_{iy})_2 + (v_{xk})_3 \left[ \begin{pmatrix} S \\ \varrho' \end{pmatrix}_{ki,3} \right] (v_{iy})_3 \right\} \\ [\bar{\tau}_{xy}] &= \frac{e}{6 EJ} \left\{ [\bar{w}_{xk}]_1 \left[ \begin{pmatrix} S \\ \varrho' \end{pmatrix}_{ki,1} \right] (\bar{w}_{iy})_1 + (\bar{w}_{xk})_2 \left[ \begin{pmatrix} S \\ \varrho' \end{pmatrix}_{ki,2} \right] (\bar{w}_{iy})_2 + (\bar{w}_{xk})_3 \left[ \begin{pmatrix} S \\ \varrho' \end{pmatrix}_{ki,3} \right] (\bar{w}_{iy})_3 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Wir ersehen hieraus wieder die schon erwähnte Zugehörigkeit von  $(w_{xk})$  und  $(w_{iy})$  zu  $[\tau_{xy}]$ , von  $(v_{xk})$  und  $(v_{iy})$  zu  $[z_{xy}]$ , von  $(\bar{w}_{xk})$  und  $(\bar{w}_{iy})$  zu  $[\bar{\tau}_{xy}]$ .

Behalten wir im Gedächtnis, daß  $r = 1$  über  $k = 1$  bis  $(n + 1)$ ,  $r = 2$  und  $3$  je über  $k = 1$  bis  $(n - 1)$ , und alle drei  $r$  je über  $i = 1$  bis  $(m + 1)$  reichen, so können wir die Ergebnisse Gl. (50a) und (55) kürzer wie folgt, schreiben.

Wir setzen abkürzend:

$$\left. \begin{aligned} [w'_{kx}]_r [T_{xy}] [w'_{yi}]_r &= [T_{ki}]_r & r = 1, 2, 3 \\ [v'_{kx}]_r [e \cdot P_{xy}] [v'_{yi}]_r &= e \cdot [P_{ki}]_r & r = 1, 2, 3 \\ [\bar{w}'_{kx}]_r [\bar{T}_{xy}] [\bar{w}'_{yi}]_r &= [\bar{T}_{ki}]_r & r = 1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI})$$

und erhalten

$$\left. \begin{aligned} [\tau_{xy}] &= \frac{e}{6 EJ} [w_{xk}]_r \left[ \frac{T_{ki} + e \cdot P_{ki} + \bar{T}_{ki}}{\varrho'_{ki}} \right]_r [w_{iy}]_r & r = 1, 2, 3 \\ [z_{xy}] &= \frac{e^2}{6 EJ} [v_{xk}]_r \left[ \frac{T_{ki} + e \cdot P_{ki} + \bar{T}_{ki}}{\varrho'_{ki}} \right]_r [v_{iy}]_r & r = 1, 2, 3 \\ [\bar{\tau}_{ki}] &= \frac{e}{6 EJ} [\bar{w}_{xk}]_r \left[ \frac{T_{ki} + e \cdot P_{ki} + \bar{T}_{ki}}{\varrho'_{ki}} \right]_r [\bar{w}_{iy}]_r & r = 1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI}')$$

In Gl. (VI') ist hierbei für jedes  $xy$  über  $r = 1, 2$  und  $3$  zu summieren!

Die Summation für jedes  $xy$  erfolgt also in drei Stufen,  $r = 1, 2$  und  $3$ , innerhalb jeder Stufe über  $k$  und  $i$  nach Matrixvorschrift Gl. (VI').

Äußere Knotenangriffsmomente  $T_{xy}$  und  $\bar{T}_{xy}$ , Gl. (50), treten z. B. auf, wenn die Träger zwischen den Knoten belastet sind. Dann denkt man sich den Rost zunächst in allen Knotenpunkten gegen Durchbiegung und Verdrehung nach  $x$  und  $y$  starr gelagert und bestimmt in den einzelnen Knoten die zugehörigen Auflagerersatzkräfte  $T_{xy}$ ,  $P_{xy}$  und  $\bar{T}_{xy}$  als Knotenbelastungen des tatsächlichen Rostes.

In vielen Fällen genügt es, den Rost nur in den Knotenpunkten mit  $P_{xy}$  belastet, d. h.  $T_{xy} = 0$  und  $\bar{T}_{xy} = 0$  anzunehmen. In diesem Falle ergeben sich in Gl. (VI') als Lastintensitäten im  $ki$ -Zustand nur die Werte  $[e \cdot P_{ki}/\varrho'_{ki}]_r$ .

Man ersieht besonders in diesem Fall den grundsätzlich gleichen Aufbau der Lösungen wie in Gl. (I), Kap. II, naturgemäß hier in 3 Stufen  $r = 1, 2, 3$ .

Die Knotenmomente sind aus den obigen Verformungsvektoren leicht abzuleiten und werden in ähnlicher Form wie Gl. (VI') als dreistufige Dreierprodukte erhalten.

Die Entwicklungen werden wesentlich kürzer, wenn wir, wie oft berechtigt, die Torsionssteifigkeit der Querträger vernachlässigen, d. h.

$$\bar{\eta} = 0 \quad (56)$$

annehmen. Hiermit wird, Knotenbelastungen vorausgesetzt, auch

$$[T_{xy}^L] = [T_{xy}^Q] = [T_{xy}] = [0] \quad (56')$$

Wir können dann aus den beiden ersten Gl. (32)  $[\tau_{xy}]$  eliminieren und erhalten aus der ersten:

$$[\tau_{xy}] = -3 \cdot (\bar{A}_{xx}^*)^{-1} [C'_{x'x''}] \left[ \left( \frac{z}{e} \right)_{x''y'} \right] (1_{y'}) \quad (57)$$



und hiermit aus der zweiten:

$$\{ -3 [C_{xx'}] (\bar{A}_{x'x''}^*)^{-1} [C_{x''x'''}] + 2 (B_{xx''}) \} \left[ \left( \frac{z}{e} \right)_{x''y'} \right] (\gamma_{y'y}) = \frac{e}{6 EJ} [e \cdot P_{xy}^L] \quad (58)$$

oder wenn wir wie in Gl. (5), Kap. II, ansetzen:

$$(D_{xx''}) = -3 [C_{xx'}] (\bar{A}_{x'x''}^*)^{-1} [C_{x''x'''}] + 2 (B_{xx''}) \quad (59)$$

$$(D_{xx'}) \left[ \left( \frac{z}{e} \right)_{x'y'} \right] (\gamma_{y'y}) = \frac{e}{6 EJ} [e \cdot P_{xy}^L] \dots \dots \dots \left[ \frac{m+1}{n-1} \right] \text{Gl.} \quad (60)$$

Naturgemäß müssen bei gleicher Längsträgerausbildung die Gl. (5<sub>1</sub>), Kap. II und Gl. (60) übereinstimmen, d. h. ( $D_{xx'}$ ) in Gl. (6<sub>1</sub>), Kap. II, und in Gl. (59) sind identisch.

Die dritte Gleichung in (32) bleibt unverändert. Die erste der Gl. (33) entfällt, die beiden übrigen bleiben unverändert. Die erste der Gl. (34) entfällt, die beiden übrigen bleiben unverändert.

Somit lauten die Vektorgleichungen in entsprechender Schreibweise wie Gl. (39) und (40):

$$\begin{matrix} r'=1 & 2 \\ r=1 \end{matrix} \begin{pmatrix} (D_{xx'}) & (0) \\ (0) & \eta (B_{xx'}) \end{pmatrix} \begin{matrix} r'=1 & 2 \\ r=2 \end{matrix} \left[ \left( \frac{z}{e} \right)_{x'y'} \right]_{\bar{\tau}_{x'y'}} = \frac{e}{6 EJ} \begin{matrix} r'=1 & 2 \\ r=2 \end{matrix} \begin{pmatrix} (\gamma_{y'y}) & (0) \\ (0) & (\gamma_{y'y}) \end{pmatrix} = \frac{e}{6 EJ} \begin{matrix} r=1 \\ r=2 \end{matrix} \begin{pmatrix} e \cdot P_{xy}^L \\ \bar{T}_{xy}^L \end{pmatrix} \quad (61)$$

$$\begin{matrix} r'=1 & 2 \\ r=1 \end{matrix} \begin{pmatrix} (\gamma_{xx'}) & \left( \frac{1}{2} \gamma_{xx'} \right) \\ \left( \frac{1}{2} \gamma_{xx'} \right) & (\gamma_{xx'}) \end{pmatrix} \begin{matrix} r'=1 & 2 \\ r=2 \end{matrix} \left[ \left( \frac{z}{e} \right)_{x'y'} \right]_{\bar{\tau}_{x'y'}} = \begin{matrix} r'=1 & 2 \\ r=2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 \left( \frac{e}{\alpha} \right)^2 (B_{y'y}) & 2 \frac{e}{\alpha} (C_{y'y}) \\ 2 \frac{e}{\alpha} (C'_{y'y}) & \frac{1}{3} (\bar{A}_{y'y}) \end{pmatrix} = \\ = \frac{\alpha}{6 EJ} \begin{matrix} r=1 \\ r=2 \end{matrix} \begin{pmatrix} e \cdot P_{xy}^Q \\ \bar{T}_{xy}^Q \end{pmatrix} \quad (62)$$

Die weitere Entwicklung ist nach dem Vorangegangenen klar. Es sind nur mehr zweistufige  $X$ - und  $Y$ -Gesamtmatrizen vorhanden. Es entfallen daher die Vektoren ( $w_{xk}$ ) und ( $w_{iy}$ ) samt ihren Transponierten. Wir können unmittelbar die notwendigen Gleichungen für die Lösungen anschreiben.

Eigenlösungsgleichung in  $X$ -Richtung:

$$\begin{pmatrix} 4 (\gamma_{xx'})^{-1} - 2 (\gamma_{xx'})^{-1} & \\ -2 (\gamma_{xx'})^{-1} & 4 (\gamma_{xx'})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (D_{x'x''}) & (0) \\ (0) & \eta (B_{x'x''}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (v_{x''k})_1 & (v_{x''k})_2 \\ (w_{x''k})_1 & (w_{x''k})_2 \end{pmatrix} = \\ = 3 \cdot \begin{pmatrix} (v_{xk})_1 & (v_{xk})_2 \\ (w_{xk})_1 & (\bar{w}_{xk})_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\lambda_{kk})_1 (0) \\ (0) (\lambda_{kk})_2 \end{pmatrix}. \quad (63)$$

Hieraus je  $(n-1)$  Eigenwerte  $(\lambda_{kk})_1$  und  $(\lambda_{kk})_2$  sowie je  $(n-1)^2$  Eigenlösungen  $(v_{xk})_1$ ,  $(v_{xk})_2$ ,  $(\bar{w}_{xk})_1$ ,  $(\bar{w}_{xk})_2$ .

Eigenlösungsleichung in  $Y$ -Richtung:

$$\begin{pmatrix} (v_{iy})_1 & (\bar{w}_{iy})_1 \\ (v_{iy})_2 & (\bar{w}_{iy})_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \left(\frac{e}{\alpha}\right)^2 (B_{y'y''}) & 2 \frac{e}{\alpha} (C_{y'y''}) \\ 2 \left(\frac{e}{\alpha}\right) (C'_{y'y''}) & \frac{1}{3} (\bar{A}_{y'y''}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\gamma_{y'y''}) & (0) \\ (0) & (\gamma_{y'y''}) \end{pmatrix}^{-1} = \\ = \begin{pmatrix} (\lambda_{ii})_1 & (0) \\ (0) & (\lambda_{ii})_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (v_{iy})_1 & (\bar{w}_{iy})_1 \\ (v_{iy})_2 & (\bar{w}_{iy})_2 \end{pmatrix} \quad (64)$$

Weiters in Anlehnung an Gl. (50a):

$$\left. \begin{aligned} [S_{ki}]_{r=1} &= (v'_{kx})_1 [e \cdot P_{xy}] (v'_{yi})_1 + (\bar{w}'_{kx})_1 [\bar{T}_{xy}] (\bar{w}'_{yi})_1 \\ [S_{ki}]_{r=2} &= (v'_{kx})_2 [e \cdot P_{xy}] (v'_{yi})_2 + (\bar{w}'_{kx})_2 [\bar{T}_{xy}] (\bar{w}'_{yi})_2 \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Weiters  $\Phi'$  und  $\varrho'$  gleichlautend mit Gl. (52), jedoch nur über  $r = 1$  und  $2$ .

Schließlich das Resultat gemäß Gl. (54a):

$$\left. \begin{aligned} [z_{xy}] &= \frac{e^2}{6 E J} \left\{ (v_{xk})_1 \left[ \left( \frac{S}{\varrho'} \right)_{ki} \right]_1 (v_{iy})_1 + (v_{xk})_2 \left[ \left( \frac{S}{\varrho'} \right)_{ki} \right]_2 (v_{iy})_2 \right\} \\ [\bar{w}_{xy}] &= \frac{e}{6 E J} \left\{ (\bar{w}_{xk})_1 \left[ \left( \frac{S}{\varrho'} \right)_{ki} \right]_1 (\bar{w}_{iy})_1 + (\bar{w}_{xk})_2 \left[ \left( \frac{S}{\varrho'} \right)_{ki} \right]_2 (\bar{w}_{iy})_2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Die Lösungen in Kurzschrift gemäß Gl. (VI) und (VI'):

$$\left. \begin{aligned} [v'_{kx}]_r [e \cdot P_{xy}] [v'_{yi}]_r &= e \cdot [P_{ki}]_r \quad r = 1, 2 \\ [\bar{w}'_{kx}]_r [\bar{T}_{xy}] [\bar{w}'_{yi}]_r &= [\bar{T}_{ki}]_r \quad r = 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (VII)$$

$$\left. \begin{aligned} [z_{xy}] &= \frac{e^2}{6 E J} [v_{xk}]_r \left[ \frac{e \cdot P_{ki} + \bar{T}_{ki}}{\varrho'_{ki}} \right]_r [v_{iy}]_r \quad r = 1, 2 \\ [\bar{w}_{xy}] &= \frac{e}{6 E J} [\bar{w}_{xk}]_r \left[ \frac{e \cdot P_{ki} + \bar{T}_{ki}}{\varrho'_{ki}} \right]_r [\bar{w}_{iy}]_r \quad r = 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (VII')$$

Die Summation in Gl. (VII') ist hiebei für jedes  $xy$  über 2 Stufen,  $r = 1$  und  $2$  sowie innerhalb jeder Stufe über  $k = 1$  bis  $(n - 1)$  und  $i = 1$  bis  $(m + 1)$  durchzuführen.

Die Rostgleichungen mit torsionsfreien Querträgern erfahren eine noch wesentlichere Vereinfachung, wenn des weiteren angenommen wird:

1. daß die Abstände der Querträger und ihre Trägheitsmomente in  $x$ -Richtung gleich seien, also

$$\varepsilon_x = 1; \gamma_x = 1, \quad (67)$$

2. daß der Verlauf der Trägheitsmomente der Längsträger konstant sei, also

$$j_x = j_x^D = 1. \quad (68)$$

Dann lauten die Bestimmungsgleichungen für die Längsträger, siehe Gl. (60) und (31), (32):

$$\left. \begin{aligned} (D_{xx'}) [z_{x'y'}] (\gamma_{y'y}) &= \frac{e^3}{6 E J} [P_{xy}^L] \dots \dots \dots \left[ \frac{m+1}{n-1} \right] \text{ Gleich.} \\ (B_{xx'}) [\bar{w}_{x'y'}] (\gamma_{y'y}) &= \frac{e}{G J^D} [\bar{T}_{xy}^L] \dots \dots \dots \left[ \frac{m+1}{n-1} \right] \text{ Gleich.} \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

für die Querträger, Gl. (33):

$$\left. \begin{aligned} a (1_{xx'}) [\bar{\tau}_{x'y'}] (C_{y'y}) + 2 (1_{xx'}) [z_{x'y'}] (B_{y'y}) &= \frac{\alpha^3}{6 E \bar{J}} [P_{xy}^Q] \left[ \frac{m+1}{n-1} \right] \text{ Gleich.} \\ a (1_{xx'}) [\bar{\tau}_{x'y'}] \frac{1}{3} (\bar{A}_{y'y}) + (1_{xx'}) [z_{x'y'}] (C_{y'y}) &= \frac{\alpha^2}{6 E \bar{J}} [\bar{T}_{xy}^Q] \left[ \frac{m+1}{n-1} \right] \text{ Gleich.} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

für die Feldknoten:

$$\left. \begin{aligned} [P_{xy}^L] + [P_{xy}^Q] &= [P_{xy}] \dots \dots \dots \left[ \frac{m+1}{n-1} \right] \text{ Gleich.} \\ [\bar{T}_{xy}^L] + [\bar{T}_{xy}^Q] &= [\bar{T}_{xy}] \dots \dots \dots \left[ \frac{m+1}{n-1} \right] \text{ Gleich.} \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Hiebei ist  $(D_{xx'})$  gleich gebaut wie in Gl. (6<sub>1</sub>), Kap. II, also:

$$(D_{xx'}) = (B_{xx'}) (A_{x'x'})^{-1} (B_{x'x'}).$$

Der Aufbau der Matrizen  $(A_{xx'})$  und  $(B_{xx'})$  für den vorliegenden Spezialfall ist auf Seite 178 angegeben. Man sieht hieraus, daß beide Aufbaumatrizen dieselben orthogonal normierten Eigenlösungen besitzen, daß also, ohne Zeiger angeschrieben:

$$\left. \begin{aligned} (v') (A) (v) &= (v) \\ (v') (B) (v) &= (\mu) \\ (v') (v) &= (1) \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Beweis: Es ist gemäß Seite 178:

$$\left. \begin{aligned} (A) + (B) &= 6 \cdot (1) \\ (v') \{ (A) + (B) \} (v) &= (v) + (\mu) = 6 (v') (1) (v) = 6 \cdot (1) \end{aligned} \right\} \quad (72')$$

Es besitzt daher auch  $(D_{xx'})$  dieselben orthogonal normierten Eigenlösungen; denn es ist:

$$(D_{xx'}) = (v) (\mu) (v') (v) \frac{1}{v} (v') (v) (\mu) (v') = (v) \frac{\mu^2}{v} (v') = (v) (\lambda) (v'). \quad (72'')$$

Hiebei betragen die Eigenlösungen für die  $n$ -Teilung:

$$v_{xk} = v'_{kx} = \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \sin \frac{k \pi x}{n} \quad (73)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{die Eigenwerte für } (A_{xx'}) : \nu_{kk} &= 2 \left( 2 + \cos \frac{k \pi}{n} \right) \\ \text{für } (B_{xx'}) : \mu_{kk} &= 2 \left( 1 - \cos \frac{k \pi}{n} \right) \\ \text{für } (D_{xx'}) : \lambda_{kk} &= 2 \cdot \frac{\left( 1 - \cos \frac{k \pi}{n} \right)^2}{2 + \cos \frac{k \pi}{n}} \end{aligned} \right\} \quad (73')$$

Wir führen nun diese Transformationen in Gl. (69) und (70) ein und erhalten mit den Abkürzungen:

$$(v'_{kx}) [z_{xy}] = [z_{ky}]; \quad (v'_{kx}) [\bar{\tau}_{xy}] = [\bar{\tau}_{ky}] \quad (74)$$

$$(v'_{kx}) [P_{xy}] = [P_{ky}]; \quad (v'_{kx}) [\bar{T}_{xy}] = [\bar{T}_{ky}] \quad (75)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{6 EJ}{e^3} (\lambda_{kk}) [z_{ky'}] (\gamma_{y'y}) &= [P_{ky}^L] \\ \frac{G J^D}{e} (\mu_{kk}) [\bar{\tau}_{ky'}] (\gamma_{y'y}) &= [\bar{T}_{ky}^L] \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

$$\left. \begin{aligned} a \cdot [\bar{\tau}_{ky'}] (C_{y'y}) + 2 [z_{ky'}] (B_{y'y}) &= \frac{a^3}{6 EJ} \{ [P_{ky}] - [P_{ky}^L] \} \\ \frac{1}{3} a \cdot [\bar{\tau}_{ky'}] (\bar{A}_{y'y}) + [z_{ky'}] (C_{y'y}) &= \frac{a^3}{6 EJ} \{ [\bar{T}_{ky}] - [\bar{T}_{ky}^L] \} \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Gl. (76) in (77) eingeführt, ergibt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{6 EJ}{a^3} \{ 2 [z_{ky'}] (B_{y'y}) + a [\bar{\tau}_{ky'}] (C_{y'y}) \} &= [P_{ky}] - \frac{6 EJ}{e^3} (\lambda_{kk}) [z_{ky'}] (\gamma_{y'y}) \\ \frac{6 EJ}{a^2} \{ [z_{ky'}] (C_{y'y}) + \frac{1}{3} a [\bar{\tau}_{ky'}] (\bar{A}_{y'y}) \} &= [\bar{T}_{ky}] - \frac{G J^D}{e} (\mu_{kk}) [\bar{\tau}_{ky'}] (\gamma_{y'y}). \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Dies sind die Bestimmungsgleichungen für einen Querträgerstrang mit elastisch unterstützten und elastisch eingespannten Knoten in  $k$  verschiedenen Zuständen. In jedem  $k$ -Zustand ist er mit der Knotenbelastung  $P_{ky}$  und  $\bar{T}_{ky}$  belastet; die zugehörige Bettungszahl im Knoten  $y$  beträgt für die Durchbiegung:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{ky} &= \frac{6 EJ}{e^3} \cdot \lambda_{kk} \cdot \gamma_{yy} \\ \gamma_{ky} &= \frac{G J^D}{e} \cdot \mu_{kk} \cdot \gamma_{yy} \end{aligned} \right\} \quad \text{für die Verdrehung:} \quad (79)$$

Aus (78) müssen nun die Werte von  $[z_{ky}]$  und  $[\bar{\tau}_{ky}]$  für die gegebene Belastung  $[P_{ky}]$  und  $[\bar{T}_{ky}]$ , Gl. (75) berechnet werden.

Die Resultate ergibt die Umkehrung von Gl. (74):

$$[z_{xy}] = (v_{xk}) [z_{ky}] \quad [\bar{\tau}_{xy}] = (v_{xk}) [\bar{\tau}_{ky}]. \quad (\text{VIII})$$

Dieser Spezialfall der torsionssteifen Roste ist in der soeben vorgeführten Berechnungsart in dem bereits auf S. 183 erwähnten Buche von Homberg behandelt.

Es steht selbstverständlich nichts im Wege, die Gl. (78) mit Hilfe von zweistufigen Eigenlösungstransformationen in  $Y$ -Richtung in der nunmehr schon bekannten Weise aufzulösen.

## V. Durchlaufträgerrost mit torsionssteifen Trägern

Nach den bisherigen Ausführungen erscheint es einleuchtend, daß die Berechnung des torsionssteifen Durchlaufträgerrostes mit Hilfe der Matrizenrechnung keine besonderen Schwierigkeiten bereitet.

In Anlehnung an Kap. III nehmen wir an:

$(m + 1)$  parallele Längsträger,  $r$  parallele Feldquerträger und insgesamt  $s$  Querträger über den Mittel- und Außenstützen. Die Steifigkeitsvoraussetzungen entsprechen den Annahmen des Kap. IV.



Die einzelnen Vektoren haben hiermit folgende Ordnung:

$$[\tau_{xy}], [T_{xy}] : \left[ \begin{array}{c} m+1 \\ r+s \end{array} \right]; [z_{xy}], [\dot{\tau}_{xy}], [P_{xy}], [\bar{T}_{xy}] : \left[ \begin{array}{c} m+1 \\ r \end{array} \right].$$

Mit Berücksichtigung dieser Ordnungen lauten die Bestimmungsgleichungen grundsätzlich wie in Kap. IV, Gl. (32) bis (34). Die Ordnungen der Aufbaumatrizen sind hierbei:

$$(\bar{A}_{xx}^*), (\gamma_{xx}^*) : \left[ \begin{array}{c} r+s \\ r+s \end{array} \right]; (B_{xx}'), (\gamma_{xx}') : \left[ \begin{array}{c} r \\ r \end{array} \right]; \\ [C_{xx}'] : \left[ \begin{array}{c} r+s \\ r \end{array} \right]; [C_{xx}''] : \left[ \begin{array}{c} r \\ r+s \end{array} \right].$$

Die  $y$ -Matrizen sind durchwegs  $\left[ \begin{array}{c} m+1 \\ m+1 \end{array} \right]$ .

Die Lösungsentwicklung erfolgt in gleicher Weise wie in Kap. IV, ebenso gleichen die Schlußlösungen grundsätzlich den Formeln (VI), (VI'), (VII) und (VII') des Kap. IV; naturgemäß sind die Werte der Eigenwerte  $\lambda_{kk}$ ,  $\lambda_{ii}$  und Eigenlösungen  $w$ ,  $v$  und  $\bar{w}$  andere als in Kap. IV. Sie werden aus den formal gleich wie in Kap. IV aufgebauten Eigenlösungsgleichungen gewonnen.

Ich hoffe, in diesem Aufsatz ausreichend gezeigt zu haben, wie sehr die Berechnung von Trägerrosten durch die Einführung der Matrizenrechnung an Einfachheit und Übersichtlichkeit gewonnen hat. Eine Rostberechnung in der vorgeführten Art besteht grundsätzlich immer aus 2 Teilen:

1. Ermittlung der zum vorliegenden Rostfall gehörigen Eigenlösungsgleichungen in  $X$ - und  $Y$ -Richtung und deren Auflösung;
2. Bildung von Matrizenprodukten aus den Belastungen, Eigenwerten und Eigenlösungen in formal gleicher Art.

Meines Erachtens wird es gut sein, wenn sich die Bauingenieure der Praxis mit der Matrizenrechnung befreunden, zumal aller Wahrscheinlichkeit nach bereits in naher Zukunft derartig umfangreiche Berechnungen wirtschaftlich von elektronisch gesteuerten Rechenautomaten geleistet werden dürften. Für diese ist aber die Matrizenrechnung eine zweckmäßige Rechnungsmethode. Für die wesentlichen Teile einer derartigen Rostberechnung, d. s. die Ermittlung der Eigenwerte und Eigenlösungen, sowie die Bildung von Matrizenprodukten aus diesen, sind die Programme der meisten Maschinen bereits bekannt. Es ist also bei Verwendung derartiger Rechenautomaten und ihrer Unterprogramme ohne weiters möglich, die tatsächlichen Abmessungsverhältnisse eines Rostes ohne wesentlichen Mehraufwand zu berücksichtigen. Näherungslösungen werden dann nur für Vorberechnungen angewendet werden.

(Eingegangen am 29. September 1960)

# Unterirdische Verbrennung als Ölförderungsmethode

Von Franz Selig und Earl J. Couch, Dallas, Texas

Mit 7 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Die mathematische Behandlung unterirdischer Verbrennungsvorgänge führt zu Problemen der Wärmeleitung in einem porösen Medium, welches von Gas durchströmt und von einer Wärmequelle durchwandert wird. Obwohl vereinfachende Annahmen gemacht werden müssen, tragen die hier abgeleiteten Lösungen wesentlich zum besseren quantitativen Verständnis der tatsächlichen Vorgänge bei. Da die Wärmeverluste durch Abgabe an die Umgebung theoretisch schwer erfaßbar sind, werden die zwei Grenzfälle — keine Wärmeverluste und maximale Wärmeverluste — untersucht. Einige Illustrationsbeispiele sind durchgerechnet und diskutiert.

## Vorbemerkung

Die Ausbeute in Lagerstätten, wo sehr viskose Erdöle vorhanden sind, kann durch Steigerung der Temperatur des Lagergesteins wesentlich erhöht werden. Unter den verschiedenen Methoden, die Wärme an die ölführende Schicht heranzubringen, stellt die Untergrund- oder in situ-Verbrennung wohl das zweckmäßigste Verfahren dar, da hierbei die praktisch wichtigste Anforderung, nämlich große Energiemengen bei niedrigem Kostenaufwand, am besten erfüllt zu sein scheint. Die in situ-Verbrennungsvorgänge waren und sind daher Gegenstand ausgedehnter experimenteller und theoretischer Untersuchungen<sup>1, 2, 3</sup>.

Im Prinzip unterscheidet man bei einem in situ-Verbrennungsvorgang folgende Arbeitsgänge (vgl. Abb. 1):

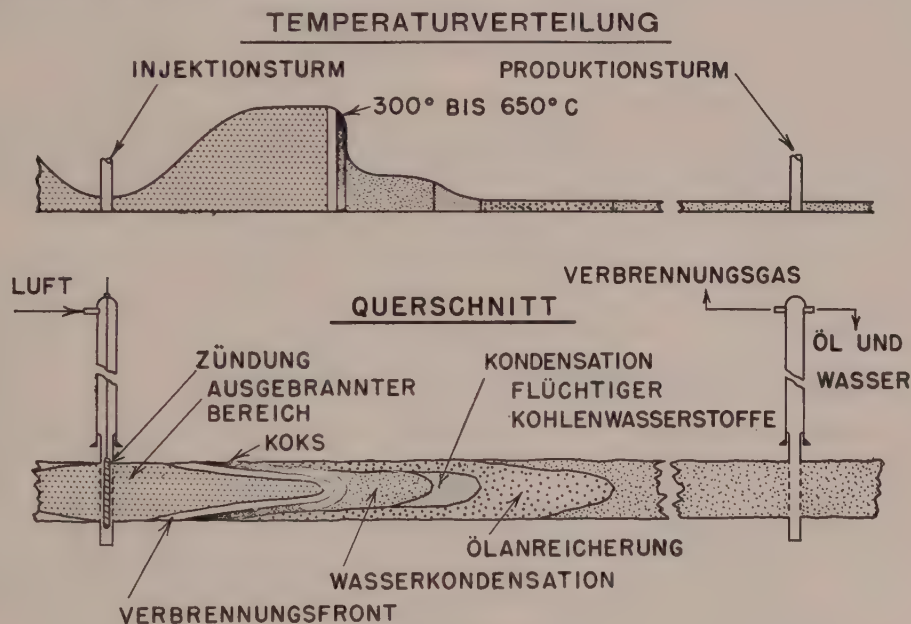


Abb. 1. Schematische Darstellung eines in situ Verbrennungsvorganges

<sup>1</sup> C. S. Kuhn and R. L. Koch: In-Situ Combustion — Newest Method of Increasing Oil Recovery, Oil and Gas Journal, **52**, No. 14, 92 (1953).

<sup>2</sup> J. T. Moss, P. D. White and J. S. McNiel: In-Situ Combustion Process — Results of a Five-Well Field Experiment in Southern Oklahoma, Petroleum Transactions AIME, **216**, 55—64 (1959).

<sup>3</sup> C. F. Gates and H. J. Ramey: Field Results of the South Belridge Thermal Recovery Experiment, Petroleum Transactions AIME, **213**, 236—244 (1958).

1. Einpumpen (Injektion) von Luft oder anderen sauerstoffhaltigen Gasen in die poröse Schicht, bis eine genügende Durchströmung erreicht ist.

2. Erhitzung der Sonde, bis die Zündung des Öles erfolgt und sich eine Verbrennungszone gebildet hat.

3. Ausbreitung der Verbrennungszone im porösen Medium bei andauernder Gaszufuhr.

Während die Verbrennungszone den Ölsand durchwandert, wird ein Teil des Öles wegen des starken Absinkens der Viskosität bei Temperaturerhöhung zu den Produktionstürmen hin verschoben. Das zurückbleibende Öl kommt mit der heißen Verbrennungszone in Berührung, wird dort thermisch gespalten und der koksähnliche Rückstand dient als Brennstoff für die selbständig vorwärtsschreitende Verbrennungszone. Der Einfluß verschiedener Faktoren auf die einzelnen Arbeitsgänge des Gesamtprozesses, wie z. B. die in der Zeiteinheit eingepumpte Gasmenge (Injektionsrate), Wanderungsgeschwindigkeit der Verbrennungszone, Brennstoffverbrauch, die zur Verbrennung von einem Kilogramm Brennstoff benötigte Luftmasse (Luft- und Brennstoffverhältnis), Verbrennungstemperatur, usw., wurde von McNiell and Moss<sup>4</sup> ausführlich diskutiert. Experimentelle Untersuchungen<sup>5, 6</sup> hierüber werden üblicherweise in Verbrennungsrohren, also in eindimensionalen Modellen, durchgeführt und aus konstruktiven Gründen unter Bedingungen, die wesentlich von denen in den Lagerstätten abweichen. Da jedoch diese Laboratoriumsversuche vornehmlich die Quellen sind, aus denen der Petroleumingenieur seine Informationen für die praktische Planung erhält, erscheint es von besonderer Wichtigkeit, daß adäquate mathematische Überlegungen mit zu Rate gezogen werden, um die Versuchsergebnisse richtig zu interpretieren.

Frühere theoretische Untersuchungen<sup>7, 8, 9</sup> waren weitgehend idealisiert. So wurde z. B. der Wärmetransport durch Konvektion meist vernachlässigt. Die Berücksichtigung dieses Gliedes erweist sich jedoch als sehr wesentlich, was auch an anderen Stellen bereits betont wurde<sup>10, 11</sup>.

<sup>4</sup> J. S. McNiell and J. T. Moss: Recent Progress in Oil Recovery by In-Situ Combustion, *Petroleum Engineer*, **30**, No. 7, B-29 (1958).

<sup>5</sup> W. L. Martin, J. D. Alexander and J. N. Dew: Process Variables of In-Situ Combustion, *Petroleum Transactions AIME*, **213**, 28–35 (1958).

<sup>6</sup> H. J. Tadema: Ölförderung mittels unterirdischer Verbrennung, *Erdöl und Kohle*, **12**, 140–144 (1959), vgl. auch S. 655.

<sup>7</sup> L. C. Vogel and R. F. Krueger: An Analog Computer for Studying Heat Transfer During a Thermal Recovery Process, *Petroleum Transactions AIME*, **204**, 205 (1955).

<sup>8</sup> H. J. Ramey: Transient Heat Conduction During Radial Movement of a Cylindrical Heat Source — Applications to the Thermal Recovery Process, *Petroleum Transactions AIME*, **216**, 115–122 (1959).

<sup>9</sup> H. R. Bailey and B. K. Larkin: Heat Conduction in Underground Combustion, *Petroleum Transactions AIME*, **216**, 123–129 (1959).

<sup>10</sup> D. R. Bland: Mathematical Theory of the Flow of a Gas in a Porous Solid and of the Associated Temperature Distribution, *Proceedings of the Royal Society, A* **221**, 1–28 (1954).

<sup>11</sup> H. R. Bailey and B. K. Larkin: Conduction-Convection in Underground Combustion, Vortrag gehalten an der 52. Jahrestagung des American Institute of Chemical Engineers, San Francisco, 6.–9. Dezember (1959).



### Beschreibung des Problems

Um die Temperaturverteilung, die sich bei unterirdischen Verbrennungsvorgängen einstellt, mathematisch zu erfassen, muß folgenden Formen des Wärmetransportes Rechnung getragen werden:

1. Wärmeleitung im festen Teil des porösen Gesteins,
2. Wärmeleitung im Flüssigkeits-Gas-Gemisch, welches die Poren des Gesteins füllt,
3. Wärmetransport durch Mitführung im Flüssigkeits- und Gasstrom,
4. Wärmeaustausch zwischen der festen, flüssigen und gasförmigen Phase,
5. Wärmeverbrauch bzw. Wärmeerzeugung bei Verdampfung und Kondensation von Wasser und flüchtigen Ölkomponten.

Der unter 5 genannte Mechanismus wurde bei der Aufstellung der Wärmebilanz nicht berücksichtigt. Weiters wurde angenommen, daß Wärmekonvektion, genannt unter 3, nur durch die Gasströmung allein bedingt ist, da erfahrungsgemäß keine Flüssigkeit durch die Verbrennungszone hindurchströmt. Als weitere Vereinfachung des Problems wurde angenommen, daß der Wärmeaustausch zwischen der festen, flüssigen und gasförmigen Phase plötzlich vor sich geht, daß sich also das injizierte Gas, das Öl und das poröse Gestein stets auf gleicher Temperatur befinden<sup>12</sup>. Unter diesen Bedingungen kann dann die Differentialgleichung der Wärmeleitung im homogenen, isotropen Medium geschrieben werden in der Form<sup>10,11</sup>

$$k \nabla^2 T - c_g V \cdot (\varrho_g \vec{v} T) + Q = c \varrho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

wobei	$k$	effektive Wärmeleitfähigkeit des Gesamtsystems
	$T$	Temperatur
	$c_g$	spezifische Wärme des Gases
	$\varrho_g$	Dichte des Gases
	$\vec{v}$	Gasfluß, d. i. das in der Zeiteinheit durch die Einheit der Gesamtfläche, senkrecht zu der Strömungsrichtung, hindurchfließende Gasvolumen
	$c \varrho = (1 - \varphi) c_s \varrho_s + \varphi c_g \varrho_g$	
	$\varphi$	Porosität des Gesteins
	$c_s$	spezifische Wärme des festen Bestandteiles
	$\varrho_s$	Dichte des festen Bestandteiles
	$t$	Zeit
	$Q$	die in der Zeiteinheit pro Einheitsvolumen erzeugte Wärmemenge

bedeuten. Die Kontinuitätsgleichung, die den Gasfluß beschreibt, ist

$$\nabla \cdot (\varrho_g \vec{v}) = - \varphi \frac{\partial \varrho_g}{\partial t} \quad (2)$$

und für eine stationäre Strömung gilt

$$\frac{\partial \varrho_g}{\partial t} = 0$$

<sup>12</sup> R. Jenkins and J. S. Aronofsky: Analysis of Heat Transfer Processes in Porous Media — New Concepts in Reservoir Heat Engineering, Producers Monthly, 19, No. 5, 37 (1955).



und daher

$$\nabla \cdot (\varrho_g \vec{v}) = 0.$$

Bei radial symmetrischer Gasströmung erhalten wir daher in Zylinderkoordinaten

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - \frac{c_g \varrho_g v}{k} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{Q}{k} = \frac{c_g}{k} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3)$$

Nehmen wir weiters an, daß pro Zeiteinheit eine konstante Masse Gas  $m_g$  injiziert wird, dann ergibt sich

$$\varrho_g v = \frac{m_g}{2 \pi r \cdot 2l}$$

wobei die Dicke der porösen Schicht mit  $2l$  bezeichnet wurde. Mit den Definitionen

$$\beta = \frac{c_g m_g}{8 \pi k l} \quad (4)$$

$$\alpha = \frac{k}{c_g} \quad (5)$$

erhalten wir dann die grundlegende Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1 - 2\beta}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{Q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6)$$

die die Temperaturverteilung im Bereich  $-l < z < l$  beschreibt. Für  $|z| = l$  grenzt die poröse Schicht an festes, undurchlässiges Gestein, also gilt

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \quad (7)$$

für  $|z| > l$ . Aus Symmetriegründen können wir uns auf die Betrachtung des Bereiches  $z > 0$  beschränken, wenn wir die Randbedingungen für  $z = 0$  entsprechend festlegen.

Wir stellen nun die Anfangs- und Randbedingungen zusammen:

$$\begin{aligned} T(r, z, 0) &= 0 & T_1(r, z, 0) &= 0 \\ T(0, z, t) &= 0 & T_1(0, z, t) &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} T(r, z, t) &= 0 & \lim_{r \rightarrow \infty} T_1(r, z, t) &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} &= 0 & \lim_{z \rightarrow \infty} T_1(r, z, t) &= 0 \end{aligned}$$

Für  $z = l$  sind nun zwei Anpassungsbedingungen zu erfüllen, z. B.

$$T(r, l, t) = T_1(r, l, t) \quad \text{oder} \quad \left[ \frac{\partial T}{\partial z} + h(T - T_1) \right]_{z=l} = 0$$

und

$$k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=l} = k_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=l}$$

Eine weitere Betrachtung dieses komplizierten, gekoppelten Randwertproblems liegt außerhalb der Ziele dieser Arbeit. Wir beschränken uns hier auf zwei Grenzfälle, die den Randbedingungen

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=l} = 0 \quad (8)$$

und 
$$T(r, l, t) = 0 \quad (9)$$

entsprechen. Die Bestimmung der Temperaturverteilung  $T_1(r, z, t)$  für  $z > l$  wird dadurch überflüssig, da die Gleichungen (6) und (7) nicht mehr durch irgend welche Anpassungsbedingungen gekoppelt sind. Die Bedingung (8) beschreibt den Fall, wo keine Wärmeverluste durch Abgabe an die Umgebung auftreten, die Lösung wird daher eine obere Schranke für den tatsächlichen Temperaturverlauf darstellen. Die Bedingung (9) entspricht dem Fall maximaler Wärmeabgabe an die Umgebung, welche hier als vollkommener Wärmeleiter angesetzt wurde, die entsprechende Lösung liefert daher eine untere Schranke.

Bleibt noch die Diskussion der Funktion  $Q$ , welche die Wärmeentwicklung in der porösen Schicht beschreibt. Diese Wärmeentwicklung tritt nur dort auf, wo das injizierte Gas mit den verkohlten Rückständen reagiert. Es zeigt sich im Versuch, daß diese Zone sehr schmal ist und daher kann die Wärmeentwicklung mit befriedigender Annäherung als Flächenquelle angesetzt werden, die in Richtung des Gasstromes fortschreitet.

### Green'sche Funktion

Der oben besprochene Ansatz für die Funktion  $Q$  legt es nahe, zunächst einmal nach den Green'schen Funktionen der beiden Grenzfälle, dargestellt in (8) und (9), zu fragen, aus denen dann durch Superposition die entsprechenden Lösungen gewonnen werden können.

Wenn wir mit  $q$  die Wärmemenge bezeichnen, die längs des Kreises  $r = r_0$  in der Ebene  $z = z_0$  zur Zeit  $t = \tau$  frei wird, dann bedeutet die Frage nach den Green'schen Funktionen die Auffindung der Lösungen der Probleme

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1-2\beta}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{2\pi r k} \delta(r-r_0) \delta(z-z_0) \delta(t-\tau) &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \\ T(r, z, 0) &= 0 \\ T(0, z, t) &= 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} T(r, z, t) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

und, im ersten Fall

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=l} = 0 \quad (11)$$

oder, im zweiten Fall

$$T(r, l, t) = 0 \quad (12)$$

Wenden wir auf (10) die Laplacetransformation

$$\mathcal{L} T(r, z, t) = \bar{T}(r, z, p) = \int_0^\infty T(r, z, t) e^{-pt} dt$$

an, dann erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} + \frac{1-2\beta}{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} + \frac{q}{2\pi r k} \delta(r-r_0) \delta(z-z_0) e^{-p\tau} &= \frac{p}{\alpha} \bar{T} \\ \bar{T}(0, z, p) &= 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \bar{T}(r, z, p) = 0 \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \Big|_{z=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

und 
$$\left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \bar{T}(r, l, p) = 0.$$

Mittels der endlichen cos-Transformation

$$\mathfrak{L} \bar{T}(r, z, p) = \tilde{T}(r, \lambda, p) = \int_0^l \bar{T}(r, z, p) \cos \lambda z \, dz$$

wo

$$\mathfrak{L} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} = -\lambda^2 \tilde{T}$$

wenn für  $\lambda$  die Eigenwerte

$$\{\lambda\} = \left\{ \frac{n\pi}{l} \right\} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

bzw. 
$$\{\lambda\} = \left\{ \frac{(2n+1)\pi}{2l} \right\} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

gewählt werden, schreiben sich beide Randwertprobleme in der gemeinsamen Form

$$\frac{d^2 \tilde{T}}{dr^2} + \frac{1-2\beta}{r} \frac{d\tilde{T}}{dr} - \lambda^2 \tilde{T} + \frac{q}{2\pi k r} \delta(r-r_0) e^{-pr} \cos \lambda z_0 = \frac{p}{\alpha} \tilde{T} \quad (16)$$

mit 
$$\tilde{T}(0, \lambda, p) = 0 \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{T}(r, \lambda, p) = 0.$$

Setzen wir

$$\xi = r \sqrt{\frac{p}{\alpha} + \lambda^2} \quad \xi_0 = r_0 \sqrt{\frac{p}{\alpha} + \lambda^2}$$

so folgt

$$\frac{d^2 \tilde{T}}{d\xi^2} + \frac{1-2\beta}{\xi} \frac{d\tilde{T}}{d\xi} - \tilde{T} = -\frac{q}{2\pi k \xi} \delta(\xi - \xi_0) e^{-p\xi} \cos \lambda z_0 \quad (17)$$

mit

$$\tilde{T}(0, \lambda, p) = 0 \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{T}(\xi, \lambda, p) = 0.$$

Die Lösung der homogenen Gleichung ist

$$\tilde{T}_h(\xi, \lambda, p) = C_1 \xi^\beta I_\beta(\xi) + C_2 \xi^\beta K_\beta(\xi) \quad (18)$$

wobei  $I_\beta(z)$  und  $K_\beta(z)$  die modifizierten Besselfunktionen erster und zweiter Art der Ordnung  $\beta$  sind. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung kann z. B. mittels der Methode von Cauchy leicht erhalten werden. Bestimmt man in (18) die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  als Funktionen einer Hilfsvariablen  $\eta$  so, daß die Funktion

$$Y(\xi, \eta) = C_1(\eta) \xi^\beta I_\beta(\xi) + C_2(\eta) \xi^\beta K_\beta(\xi)$$

den Bedingungen

$$Y(\xi, \eta) |_{\xi=\eta} = 0, \quad \left. \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right|_{\xi=\eta} = 1$$

genügt, dann ist

$$\tilde{T}_{sp}(\xi, \lambda, p) = -\frac{q}{2\pi k} e^{-p\xi} \cos \lambda z_0 \int_0^\xi \frac{\delta(\eta - \xi_0)}{\eta} Y(\xi, \eta) \, d\eta \quad (19)$$

jene spezielle Lösung von (17), für die

$$\tilde{T}_{sp}(0, \lambda, p) = 0 \quad \cdot \quad \left. \frac{\partial \tilde{T}_{sp}(\xi, \lambda, p)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0$$

gilt. Die Funktion  $Y(\xi, \eta)$  berechnet sich als

$$Y(\xi, \eta) = \eta \left( \frac{\xi}{\eta} \right)^\beta [I_\beta(\xi) K_\beta(\eta) - I_\beta(\eta) K_\beta(\xi)].$$

Führt man die Integration in (19) aus, so folgt

$$\tilde{T}_{sp}(\xi, \lambda, p) = -\frac{q}{2\pi k} e^{-p\tau} \cos \lambda z_0 \begin{cases} 0, & \xi < \xi_0 \\ \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right)^\beta [I_\beta(\xi) K_\beta(\xi_0) - I_\beta(\xi_0) K_\beta(\xi)], & \xi > \xi_0 \end{cases} \quad (20)$$

und die Lösung, die den Randbedingungen in (16) angepaßt ist, schreibt sich in der Form

$$\tilde{T}(r, \lambda, p) = \frac{q}{2\pi k} \left( \frac{r}{r_0} \right)^\beta e^{-p\tau} \cos \lambda z_0 \begin{cases} I_\beta \left( r \sqrt{\frac{p}{\alpha} + \lambda^2} \right) K_\beta \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{\alpha} + \lambda^2} \right), & r < r_0 \\ I_\beta \left( r_0 \sqrt{\frac{p}{\alpha} + \lambda^2} \right) K_\beta \left( r \sqrt{\frac{p}{\alpha} + \lambda^2} \right), & r > r_0. \end{cases} \quad (21)$$

Wenden wir zuerst die inverse Laplacetransformation

$$\mathcal{L}^{-1} \tilde{T}(r, \lambda, p) = T^*(r, \lambda, t)$$

an, so erhalten wir<sup>13</sup>

$$T^*(r, \lambda, t) = \frac{q}{4\pi k} \left( \frac{r}{r_0} \right)^\beta \frac{e^{-\frac{r^2 + r_0^2}{4\alpha(t-\tau)}}}{t-\tau} I_\beta \left( \frac{r r_0}{2\alpha(t-\tau)} \right) e^{-\alpha\lambda^2(t-\tau)} \cos \lambda z_0. \quad (22)$$

Umkehrung der endlichen cos-Transformation liefert unter Berücksichtigung von Gleichung (14)

$$T(r, z, t) = \frac{q}{4\pi k l} \left( \frac{r}{r_0} \right)^\beta \frac{e^{-\frac{r^2 + r_0^2}{4\alpha(t-\tau)}}}{t-\tau} I_\beta \left( \frac{r r_0}{2\alpha(t-\tau)} \right) \cdot \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2 (t-\tau)}{l^2}} \cdot \cos \frac{n\pi z_0}{l} \cos \frac{n\pi z}{l} \right) \quad (23)$$

womit die Greensche Funktion für den verlustfreien Fall bestimmt ist. Ähnlich, unter Berücksichtigung von Gleichung (15) erhalten wir

$$T(r, z, t) = \frac{q}{2\pi k l} \left( \frac{r}{r_0} \right)^\beta \frac{e^{-\frac{r^2 + r_0^2}{4\alpha(t-\tau)}}}{t-\tau} I_\beta \left( \frac{r r_0}{2\alpha(t-\tau)} \right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\alpha(2n+1)^2 \pi^2 (t-\tau)}{4l^2}} \cos \frac{(2n+1)\pi z_0}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2l} \quad (24)$$

und diese Lösung stellt die Greensche Funktion für den Fall maximaler Verluste dar.

<sup>13</sup> A. Erdelyi: Tables of Integral Transforms, Vol. I, New York, McGraw Hill Book Co., 1954.



### Lösung der beiden Probleme

Wir konstruieren die Temperaturverteilung für eine zylindrische Flächenquelle durch Superposition der oben erhaltenen Lösungen für die ringförmigen Linienquellen. Ersetzen wir  $q$  durch  $q dz_0$  und integrieren die Gleichung (23) von 0 bis  $l$ , dann ergibt sich\*

$$T(r, t) = \frac{q}{4\pi k(t-\tau)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^\beta e^{-\frac{r^2 + r_0^2}{4\alpha(t-\tau)}} I_\beta\left(\frac{r r_0}{2\alpha(t-\tau)}\right) \quad (25)$$

und  $q$  bedeutet die pro Einheitslänge des Zylinders frei gewordene Wärmemenge. Auf gleiche Weise ergibt sich durch Integration der Gleichung (24)

$$T(r, z, t) = \frac{q}{\pi^2 k(t-\tau)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^\beta e^{-\frac{r^2 + r_0^2}{4\alpha(t-\tau)}} I_\beta\left(\frac{r r_0}{2\alpha(t-\tau)}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} e^{-\frac{\alpha(2n+1)^2 \pi^2 (t-\tau)}{4l^2}} \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2l} \quad (26)$$

Nun muß noch mit Rücksicht auf die Zeit superponiert werden um eine kontinuierliche Flächenquelle darzustellen. Nehmen wir an, daß sich die Quelle zur Zeit  $\tau$  in  $r_0 = f(\tau)$  befindet und daß  $\varphi(\tau)$  die in der Zeiteinheit pro Flächeneinheit der Zylinderfläche erzeugte Wärmemenge ist, dann folgt nach der Ersetzung von  $q$  durch  $2\pi\varphi(\tau)f(\tau)d\tau$

$$T(r, t) = \frac{1}{2k} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)f(\tau)}{t-\tau} \left(\frac{r}{f(\tau)}\right)^\beta e^{-\frac{r^2 + f^2(\tau)}{4\alpha(t-\tau)}} I_\beta\left(\frac{r f(\tau)}{2\alpha(t-\tau)}\right) d\tau \quad (27)$$

und

$$T(r, z, t) = \frac{2}{\pi k} \int_0^t \left[ \frac{\varphi(\tau)f(\tau)}{t-\tau} \left(\frac{r}{f(\tau)}\right)^\beta e^{-\frac{r^2 + f^2(\tau)}{4\alpha(t-\tau)}} I_\beta\left(\frac{r f(\tau)}{2\alpha(t-\tau)}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} e^{-\frac{\alpha(2n+1)^2 \pi^2 (t-\tau)}{4l^2}} \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2l} \right] d\tau \quad (28)$$

Diese Resultate stellen somit die gesuchten Temperaturverteilungen in der porösen, gasdurchströmten Schicht für die oben beschriebenen Grenzfälle dar. Die Geschwindigkeit des Fortschreitens der Verbrennungsfront sowie die Wärmeerzeugung pro Zeit- und Flächeneinheit sind hierbei noch willkürlich wählbar, nur die Injektionsrate  $\beta$  wurde als konstant vorausgesetzt. Durch Spezialisierung von  $f(t)$  und  $\varphi(t)$  lassen sich nun eine Reihe von Einzelfällen behandeln.

Zuerst wollen wir den Fall einer Linienquelle im Ursprung betrachten. Wenn mit  $q(t)$  die pro Längen- und Zeiteinheit erzeugte Wärmemenge bezeichnet wird, also

$$q(t) = \lim_{f(t) \rightarrow 0} 2\pi\varphi(t)f(t)$$

dann führt der Grenzübergang  $f(t) \rightarrow 0$  in (27) zu

$$T(r, t) = \frac{1}{4\pi k \Gamma(1+\beta)} \int_0^t \frac{q(\tau)}{t-\tau} \left(\frac{r^2}{4\alpha(t-\tau)}\right)^\beta e^{-\frac{r^2}{4\alpha(t-\tau)}} d\tau \quad (29)$$

\* Dies entspricht dem Fall, wo die Verbrennung gleichmäßig über der gesamten Dicke der Schicht stattfindet. Lösungen unter Zugrundelegung anderer Annahmen können auf gleiche Weise erhalten werden, der numerische Rechenaufwand wird jedoch erheblich vergrößert.

Dadurch ist die Temperaturverteilung in der wärmeisolierten Schichte bei Anwesenheit einer Linienquelle im Ursprung beschrieben. Ähnlich ließe sich die entsprechende Temperaturverteilung hinschreiben, wenn die umgebende Formation als vollkommener Wärmeleiter angesetzt würde.

Entspricht die Wärmeentwicklung einem Gesetz der Form

$$q(t) = C t^\nu, \quad \nu > -1$$

dann kann (29) integriert werden<sup>13</sup>, und es folgt

$$T(r, t) = \frac{C t^\nu}{4 \pi k} \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\beta + 1)} \left( \frac{r^2}{4 \alpha t} \right)^{\frac{\beta-1}{2}} e^{-\frac{r^2}{8 \alpha t}} W_{\frac{\beta-1}{2}, \frac{\beta}{2}} \left( \frac{r^2}{4 \alpha t} \right) \quad (30)$$

wo  $W_{\nu, \mu}(z)$  die Whittaker'sche konfluente hypergeometrische Funktion bedeutet<sup>14</sup>. Linearkombination derartiger Lösungen können verwendet werden, um den allgemeineren Fall

$$q(t) = \sum C_i t^{\nu_i}, \quad \nu_i > -1$$

zu lösen. Für  $\nu = 0$  reduziert sich Gleichung (30) auf

$$T(r, t) = \frac{C}{4 \pi k} \frac{\Gamma\left(\beta, \frac{r^2}{4 \alpha t}\right)}{\Gamma(\beta + 1)} \quad (31)$$

wobei  $\Gamma(\beta, z)$  die unvollständige Gammafunktion bedeutet<sup>15</sup>.

Im Falle einer bewegten Wärmequelle betrachten wir nur den Spezialfall, daß die Fortschreitungs geschwindigkeit indirekt proportional zur Entfernung vom Injektions-turm ist, also

$$\frac{dr_0}{dt} = \frac{U}{r_0} \quad (32)$$

oder mit  $r_0 = 0$  für  $t = 0$

$$r_0 = f(t) = \sqrt{2 U t}. \quad (33)$$

Setzen wir die Wärmeentwicklung wieder in der Form

$$\varphi(t) f(t) = C U t^\mu, \quad \mu > -1 \quad (34)$$

an, dann erhalten wir aus (27)

$$T(r, t) = \frac{C U}{2 k} \int_0^t \frac{\tau^\mu}{t - \tau} \left( \frac{r}{\sqrt{2 U \tau}} \right)^\beta e^{-\frac{r^2 + 2 U \tau}{4 \alpha (t - \tau)}} I_\beta \left( \frac{r \sqrt{2 U \tau}}{2 \alpha (t - \tau)} \right) d\tau. \quad (35)$$

Dieses Integral geht bei der Anwendung der Substitution

$$\tau = \frac{t z}{z + b} \quad \text{mit } b = \frac{1 + R^2}{R^2}$$

über in<sup>16</sup>

<sup>14</sup> H. Buchholz: Die konfluente hypergeometrische Funktion mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen, Berlin, Springer, 1953.

<sup>15</sup> K. Pearson: Tables of the Incomplete Gamma Function, Cambridge University Press, 1957.

<sup>16</sup> A. Erdelyi: loc. cit. p. 201, Equation (15).

$$\frac{T(R, t)}{T_a} = R^{\beta-1} e^{\frac{A}{2}(1-R^2)} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta+1)} \begin{cases} M_{\frac{\beta-1}{2}-\mu, \frac{\beta}{2}}(AR^2) \cdot W_{\frac{\beta-1}{2}-\mu, \frac{\beta}{2}}(A), & 0 < R \leq 1 \\ M_{\frac{\beta-1}{2}-\mu, \frac{\beta}{2}}(A) \cdot W_{\frac{\beta-1}{2}-\mu, \frac{\beta}{2}}(AR^2), & R \geq 1 \end{cases} \quad (36)$$

wobei

$$A = \frac{U}{2\alpha}, \quad R = \frac{r}{r_0}, \quad T_a = \frac{C t^\mu}{c \varrho}$$

gesetzt wurde. Wie früher können die Whittakerschen Funktionen  $M_{\kappa, \mu}(z)$  und  $W_{\kappa, \mu}(z)$  in Spezialfällen durch tabellierte Funktionen ausgedrückt werden, jedoch auch in anderen Fällen bietet eine numerische Auswertung keine prinzipiellen Schwierigkeiten<sup>14</sup>.

Wenden wir (33) und (34) auf (28) an, dann folgt

$$T(r, z, t) = \frac{2CU}{\pi k} \int_0^t \left[ \frac{\tau^\mu}{t-\tau} \left( \frac{r}{\sqrt{2U\tau}} \right)^\beta e^{-\frac{r^2+2U\tau}{4\alpha(t-\tau)}} I_\beta \left( \frac{r\sqrt{2U\tau}}{2\alpha(t-\tau)} \right) \right. \\ \left. \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} e^{-\frac{\alpha(2n+1)^2\pi^2(t-\tau)}{4l^2}} \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2l} \right] d\tau. \quad (37)$$

Diese Temperaturverteilung entspricht dem Minimumfall. Eine weitere analytische Behandlung scheint in gleicher Allgemeinheit nicht möglich zu sein.

### Anwendungen

Um die Anwendungsmöglichkeiten zu beschreiben, müssen wir zunächst die Funktionen  $f(t)$  und  $\varphi(t)$  mit den physikalischen und technischen Größen in Verbindung bringen. Experimente zeigen<sup>5</sup>, daß die Frontgeschwindigkeit proportional zum Sauerstofffluß durch die Verbrennungsfront ist, und zwar gilt

$$\frac{dr_0}{dt} = \frac{m_g}{4\pi l W \delta r_0} \quad (38)$$

wobei  $W$  Brennstoffkonzentration (Masse/Volumen)

$\delta$  Gas-Brennstoffverhältnis (Masse/Masse)

bedeuten. Die Lage der Verbrennungsfront ist daher bei gegebener Zeit nicht mehr willkürlich, sondern ist durch die vorliegenden Lagerstättenverhältnisse und Arbeitsbedingungen entsprechend (38) festgelegt. Wenn wir das Produkt  $W\delta$ , welches die für die Ausbrennung von 1 m<sup>3</sup> des porösen, ölführenden Gesteins benötigte Gasmasse angibt, als konstant annehmen, dann ist Gleichung (38) mit Gleichung (32) identisch, wenn die Proportionalitätskonstante

$$U = \frac{m_g}{4\pi l W \delta} = 2\alpha A \quad (39)$$

gewählt wird.

Die Wärmeerzeugung kann nun folgendermaßen dargestellt werden:

$$\varphi(t) = \Delta H W f'(t) = \frac{\Delta H W U}{f(t)} = \frac{\Delta H m_g}{4\pi l \delta r_0} \quad (40)$$



wobei  $\Delta H$ , die Verbrennungswärme des Brennstoffes, im allgemeinen als konstant angesehen werden kann. Das Gas-Brennstoffverhältnis  $\delta$  ändert sich bei gegebener Brennstoffzusammensetzung mit dem Sauerstoffgehalt des injizierten Gases. Da nun für einen gegebenen Fall sowohl die Injektionsrate als auch die Zusammensetzung des Injektionsgases\* festgelegt sind, verbindet Gleichung (40) die Wärmeerzeugung mit der Brennstoffkonzentration und dem Gas-Brennstoffverhältnis, wobei die Bedingung, daß das Produkt  $W \delta$  konstant bleiben muß, berücksichtigt werden muß. Mit unseren Annahmen sind wir also auf konstantes  $\beta$ ,  $A$  und  $W \delta$  beschränkt. Die Zahlenwerte selbst können innerhalb gewisser Grenzen durch Veränderung der Injektionsrate und des Sauerstoffgehaltes des Injektionsgases variiert werden. Gleichung (4) zeigt, daß  $\beta$  proportional zur Injektionsrate  $m_g/2l$  ist, während  $A$  gemäß Gleichung (39) bei gegebenem  $\beta$  indirekt proportional zu  $\delta$  ist, welches in erster Linie wieder von der Sauerstoffkonzentration im Injektionsgas abhängt.

Zuerst behandeln wir den Fall konstanter Brennstoffkonzentration\*\* ohne Wärmeverluste in vertikaler Richtung. Ein Vergleich zwischen (34) und (40) zeigt, daß wir

$$C = \Delta H W, \quad \mu = 0$$

wählen müssen und in diesem Fall kann (36) durch die unvollständigen Gammafunktionen dargestellt werden<sup>14, 15</sup>.

$$\frac{T}{T_a} = \frac{A^{1-\beta} e^A}{\Gamma(\beta)} \begin{cases} \gamma(\beta, AR^2) \Gamma(\beta, A), & 0 < R \leq 1 \\ \gamma(\beta, A) \Gamma(\beta, AR^2), & R \geq 1 \end{cases} \quad (41)$$

Weiters kann (41) für ganzzahliges  $\beta$  in elementarer Form ausgedrückt werden

$$\frac{T}{T_a} = \frac{n!}{A^n} \begin{cases} e_n(A) [1 - e^{-AR^2} e_n(AR^2)], & 0 < R \leq 1 \\ e^{-A(R^2-1)} e_n(AR^2) [1 - e^{-A} e_n(A)], & R \geq 1 \end{cases} \quad (42)$$

mit

$$e_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}, \quad \beta = 1 + n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

was für die numerische Auswertung besonders bequem ist.

Abb. 2 und 3 zeigen die Temperaturverteilung in radialer Richtung entsprechend Gleichung (41) und (42). In den Abbildungen ist die Verbrennungsfront stets an der Stelle  $R = 1$  zu denken. Es tritt dann für  $R = 1$  eine Diskontinuität in der Ableitung auf und die Differenz zwischen linksseitigem und rechtsseitigem Grenzwert ist proportional zur Wärmeerzeugung pro Zeiteinheit in diesem Punkt. Die Abhängigkeit der Temperatur von der Zeit und der Entfernung ist explizit in Abb. 4 dargestellt. Die adiabatische Temperaturzunahme, die für 500 Tage nach Beginn des Verbrennungsprozesses eingetragen ist, entspricht der Annahme, daß die Wärmeleitung gegenüber der Wärmekonvektion vernachlässigt werden kann und stellt daher die maximale Verbrennungstemperatur dar, die unter den gemachten Annahmen auftreten könnte.

\* Das Gas-Brennstoffverhältnis sowie die Konzentration und die Zusammensetzung des kohle-ähnlichen Brennstoffes hängen von der Verbrennungscharakteristik des Ölsandes ab. Diese Werte müssen natürlich im Laboratoriumsversuch bestimmt werden. Die Messungen an zahlreichen Proben ergeben, daß die für die Ausbrennung von 1 m<sup>3</sup> Ölsand benötigte Luftmasse zwischen 250 und 500 kg liegt, wenn 100 % ige Sauerstoffausnützung zugrunde gelegt wird.

\*\* Die Annahme konstanter Brennstoffkonzentration erscheint im Hinblick auf die bisherigen Erfahrungen über die Brennstoffablagerung zutreffend. Darüber hinaus bedeutet dies, entsprechend Gleichung (39), den in der Praxis vorherrschenden Fall konstanter Zusammensetzung des Injektionsgases.



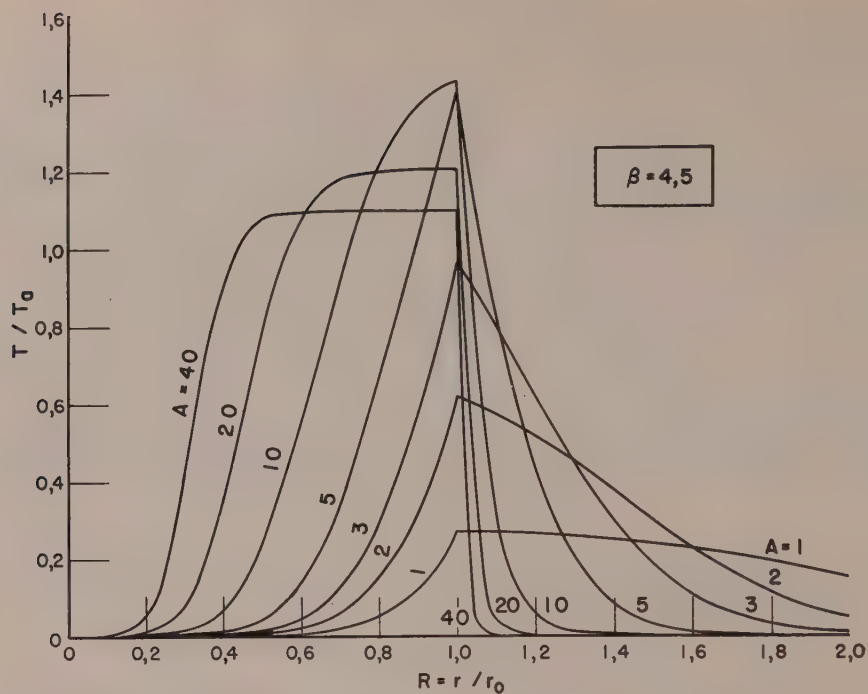


Abb. 2 Temperaturverteilung im verlustfreien Fall — konstante Brennstoffkonzentration —  
Injektionsrate  $\beta = 4.5$

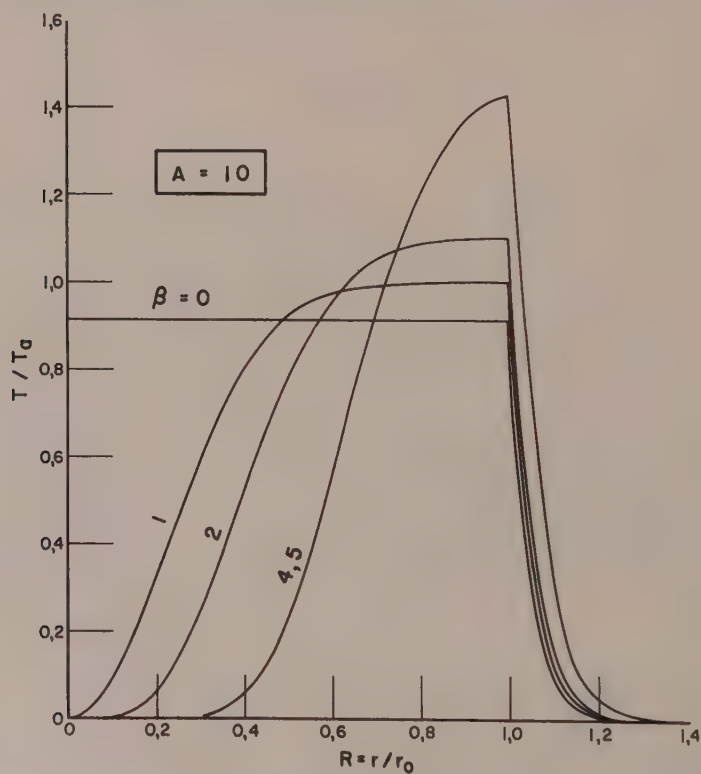


Abb. 3 Temperaturverteilung im verlustfreien Fall — konstante Brennstoffkonzentration —  
Geschwindigkeitsparameter  $A = 10$

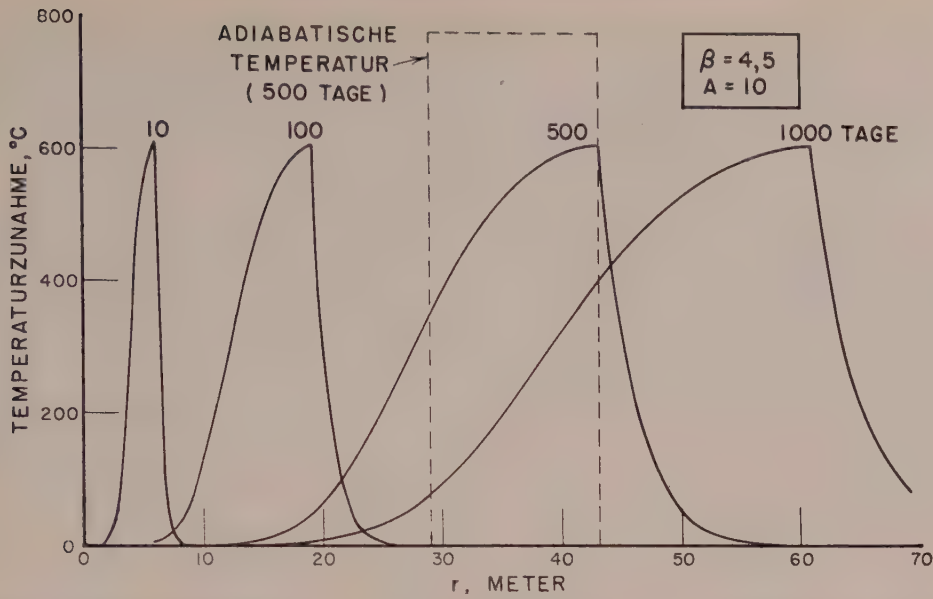


Abb. 4 Temperaturverteilung im verlustfreien Fall — konstante Brennstoffkonzentration —  
Numerisches Beispiel. Zahlenwerte:

$m_g/2l$	455 kg/m hr (10,5 Mol % $O_2$ )	$c_g$	0,24 Cal/kg °C
$k$	1,935 Cal/hr m °C	$W$	24 kg Brennstoff/m <sup>3</sup> Ölsand
$c\rho$	500 Cal/m <sup>3</sup> °C	$\delta$ Luft	19,5 kg Luft/kg Brennstoff
		$\Delta H$	8890 Cal/kg

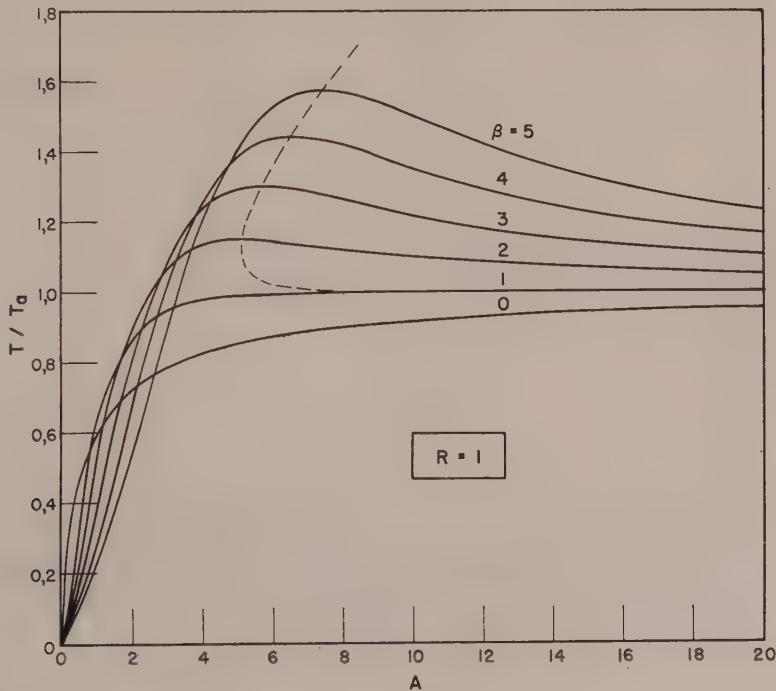


Abb. 5 Verbrennungsfronttemperatur im verlustfreien Fall —  
konstante Brennstoffkonzentration

Die hier gewählten Zahlenwerte für die physikalischen und technischen Größen entsprechen der Injektion eines Gases mit 10,5 Mol Sauerstoff in 100 Mol des Injektionsgases\*. Bei der Wahl dieser reduzierten Sauerstoffkonzentration liefert die Rechnung eine Temperaturzunahme in der Verbrennungsfront um 100° C höher als bei Injektion von Luft unter sonst gleichen Bedingungen.

Die Verbrennungsfronttemperatur, berechnet aus Gleichung (42) mit  $R = 1$ , ist in Abb. 5 dargestellt. Das Augenfällige an diesem Schaubild ist das Auftreten eines Temperaturmaximums für genügend große Injektionsraten  $\beta$ , eingezeichnet als gebrochener Linienzug. Da das Verhältnis  $A : \beta$  bei Anwendung von Luft zwischen 2,5 und 10 liegt, kann in den meisten praktischen Fällen das Maximum der Fronttemperatur nur durch Injektion eines Gases erreicht werden, das wesentlich geringere Sauerstoffkonzentration als Luft aufweist.

Die Temperaturverteilung im Falle maximaler Wärmeverluste folgt aus Gleichung (37) mit

$$C = \Delta H W \text{ und } \mu = 0$$

in der Form

$$\frac{T(R, z, r_0)}{T_a} = \frac{4 A R^\beta}{\pi} \int_0^1 \left[ \frac{e^{-A \frac{R^2+x}{1-x}}}{(1-x) x^{\beta/2}} I_\beta \left( \frac{2 A R \sqrt{x}}{1-x} \right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 r_0^2 (1-x)}{16 A l^2}} \cos \frac{(2n+1) \pi z}{2 l} \right] dx \quad (43)$$

wobei  $\tau = t x$  gesetzt wurde. Ein Vergleich der Verbrennungsfronttemperatur längs der Mittellinie der Schicht, d. i.  $z = 0$ , für die beiden Grenzfälle ist in Abb. 6 dargestellt. Aufgetragen wurde das Verhältnis der minimalen zur maximalen Temperatur, das aus (43) und (42) berechnet wurde. Für den speziellen Fall  $\beta = 4,5$  geben beide

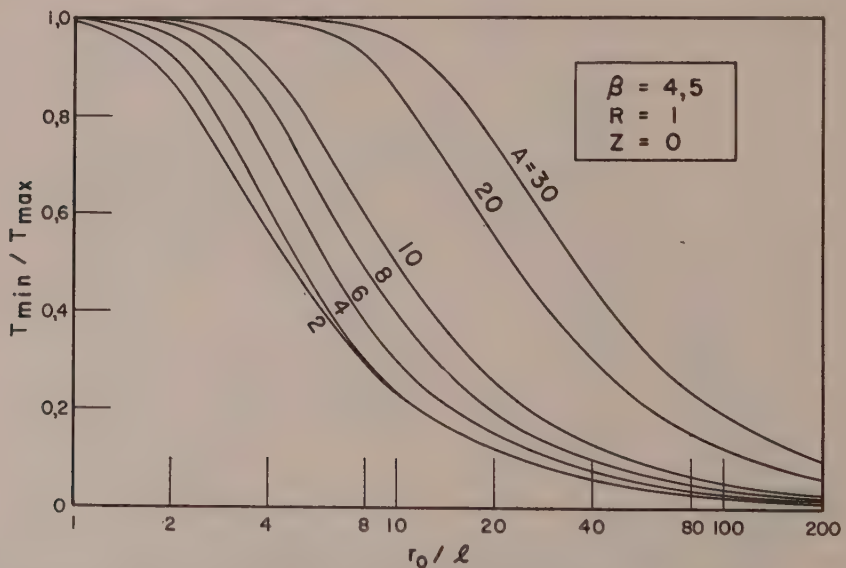


Abb. 6 Vergleich der Fronttemperaturen bei maximalem und minimalem Wärmeverlust

\* Wir haben eine vereinfachte stöchiometrische Beziehung angenommen, wodurch das Gas-Brennstoffverhältnis invers proportional zur Sauerstoffkonzentration wurde.

Formeln praktisch die gleiche Fronttemperatur innerhalb eines Bereiches einer Formationsdicke, d. h. für  $r_0 \leq 2l$ .

Nun betrachten wir noch kurz den Fall konstanten Wärmeflusses durch die Verbrennungsfront. Für  $\varphi(t) = \text{konst.}$  erhalten wir aus (34) und (40)

$$C = \frac{\Delta H W \sqrt{2U}}{r_0}, \quad \mu = \frac{1}{2}$$

und die Gleichung (36) geht über in

$$\frac{T}{T_a} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{R^{\beta-1} e^{\frac{A}{2}(1-R^2)}}{\Gamma(\beta+1)} \begin{cases} M_{\frac{\beta}{2}-1, \frac{\beta}{2}}(AR^2) \cdot W_{\frac{\beta}{2}-1, \frac{\beta}{2}}(A), & 0 < R \leq 1 \\ M_{\frac{\beta}{2}-1, \frac{\beta}{2}}(A) \cdot W_{\frac{\beta}{2}-1, \frac{\beta}{2}}(AR^2), & R \geq 1. \end{cases} \quad (44)$$

Die Temperaturverteilung für den verlustfreien Fall, dargestellt in Abb. 7, wurde für  $\beta = 4,5$  aus Gleichung (44) berechnet. Die Annahme eines konstanten Wärmeflusses

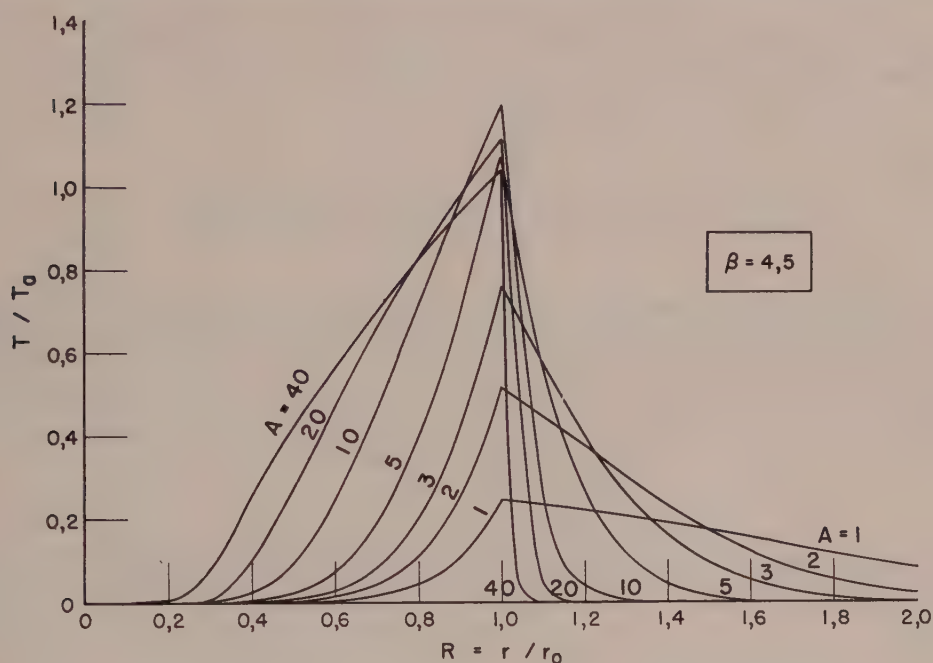


Abb. 7 Temperaturverteilung im verlustfreien Fall — konstanter Wärmefluß —  
Injektionsrate  $\beta = 4,5$

erfordert, daß sich die Brennstoffkonzentration direkt proportional zur Entfernung  $r_0$  ändert und darüber hinaus, daß das Gas-Brennstoffverhältnis verkehrt proportional zu  $r_0$  ist. Die erstere Bedingung kann experimentell nicht gerechtfertigt werden und die letztere muß vom technischen Standpunkt aus schwer erfüllbar erscheinen. Im Hinblick auf diese Tatsachen ist dieser Fall nur von sehr geringem praktischem Interesse und wurde nur zu Vergleichszwecken mit den von H. Ramey<sup>8</sup> publizierten Ergebnisse für  $\beta = 0$  hier aufgenommen.

Alle oben angegebenen Lösungen geben die Temperaturzunahme relativ zur Temperatur der Formation an. Ebenso wurde die Temperatur am Injektionsturm



stets gleich der Anfangstemperatur angenommen. Andere Erwärmungsvorgänge, wie z. B. Vorerwärmung der Schicht durch Injektion eines heißen Gases oder durch elektrische Aufheizung während des Zündvorganges können durch Superposition entsprechender Lösungen der Linienquellverteilungen, siehe Gleichung (29), mit in Rechnung gestellt werden.

### Schlußbemerkung

Die Ergebnisse dieser theoretischen Untersuchungen einiger Aspekte der in situ Verbrennungsvorgänge zeigen klar, daß die Wärme konvektion einen bedeutenden Anteil am Wärmetransport hat und die Temperaturverteilung sowie die Verbrennungsfrenttemperatur wesentlich beeinflußt.

Wir sprechen der Verwaltung der Socony Mobil Oil Company für die Publikations-erlaubnis dieser Arbeit den besten Dank aus.

(Eingegangen am 13. 6. 1960)

## Contributo allo studio dei sistemi elasto-plastici

L. Stabilini, Milano

Con 1 Figura

### I. I teoremi fondamentali dell "elasto-plasticità"

#### A. Premessa

Come legge generale che lega le tensioni alle deformazioni nel campo elasto-plastico è oggi accettata quella di Prandtl-Reuss<sup>1</sup> che però nelle applicazioni porta notevoli complicazioni di calcolo. Si preferisce perciò nella pratica, allo stato attuale delle nostre conoscenze, ricorrere a espressioni molto semplici ma convenienti per gli sviluppi analitici e accettabili nell'ambito di uno studio di prima approssimazione.

In questo spirito, nel seguito si fa riferimento alla legge di Tresca de Saint-Venant, in Italia ripetutamente applicata da Colonnetti<sup>2</sup>, che per deformazioni che non vadano molto oltre a quelle corrispondenti alla tensione di snervamento  $\sigma_s$ , è illustrata nella Fig. 1.

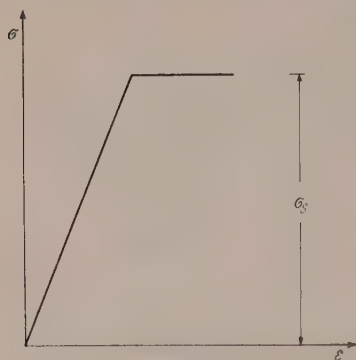


Fig. 1

#### B. Il teorema dei lavori virtuali nell' "elasto-plasticità"

a) L'equazione dei lavori virtuali. — Consideriamo un corpo soggetto ad un sistema di forze  $F$  a cui conseguono reazioni dei vincoli  $C$  e tensioni interne  $\sigma_x, \sigma_y, \dots$ . Siano  $\eta_F, \eta_C$  gli spostamenti dei punti di applicazione delle  $F$  e delle  $C$  e  $\epsilon_x + \epsilon_{xp}, \epsilon_y + \epsilon_{yp}, \dots$  le deformazioni interne che possono considerarsi somme di una parte elastica e di una parte plastica. Le  $\eta_F, \eta_C, \epsilon_x + \epsilon_{xp}, \epsilon_y + \epsilon_{yp}, \dots$  siano congruenti. Consi-

<sup>1</sup> A. Reuss: Berücksichtigung der elastischen Formänderungen in der Plastizitätstheorie, ZAMM, 1930, pag. 266.

<sup>2</sup> G. Colonnetti; Scienza delle Costruzioni, Torino, Einaudi, 1953,

deriamo ora lo stesso corpo soggetto ad altre forze, pure in equilibrio,  $F'$  a cui conseguono reazioni di vincolo  $C'$ , tensioni interne  $\sigma_x', \sigma_y', \dots$  e deformazioni  $\varepsilon_x', \varepsilon_y', \dots$ . Le  $F', C', \sigma_x', \sigma_y', \dots$ , siano in equilibrio.

Possiamo allora scrivere l'equazione dei lavori virtuali

$$\sum F' \eta_F + \sum C' \eta_C = \int_V [\sigma_x' (\varepsilon_x + \varepsilon_{xp}) + \sigma_y' (\varepsilon_y + \varepsilon_{yp}) + \dots] dV. \quad (1)$$

Come si sa le  $\sigma$  e le  $\varepsilon$  sono relative a sollecitazione di componente normale e flessione, le  $\tau$  e le  $\gamma$  a sforzo di taglio e momento torcente. Chiameremo effettivo il sistema delle  $F$ , fittizio quello delle  $F'$ .

Lo stato di deformazione effettivo e quello fittizio siano dapprima quelli dovuti soltanto ad uno sforzo normale  $N$  agente secondo  $x$ :

$$\varepsilon_x + \varepsilon_{xp} = \lambda \quad (\lambda \text{ costante}), \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{yp} = \varepsilon_z = \varepsilon_{zp} = 0 \quad (2)$$

(trascurando le azioni mutue fra le diverse fibre longitudinali.)

Le equazioni di equilibrio della sezione alla traslazione ed alla rotazione sono:

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x dA = E \int_A \varepsilon_x dA = E \lambda \int_A dA - E \int_A \varepsilon_{xp} dA \\ M_x &= \int_A \sigma_x y dA = E \int_A \varepsilon_x y dA = E \lambda \int_A y dA - E \int_A \varepsilon_{xp} y dA = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

indicando con  $y$  la distanza dell'elemento generico  $dA$  dall'asse baricentrico. La seconda delle (3), essendo  $\int_A y dA = 0$  è per ipotesi  $\varepsilon_{xp} = \text{costante}$ , è soddisfatta come identità.

La prima delle (3) dà poi

$$\lambda = \frac{N + E \int_A \varepsilon_{xp} dA}{E A} = \frac{N + E A \varepsilon_{xp}}{E A}. \quad (4)$$

Con questo valore, ossia nel caso di deformazione effettiva di componente normale, il primo integrale del secondo membro della (1) diviene, indicando con  $N'$  lo sforzo normale per la condizione di carico fittizia,

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_x' \lambda dV &= \int_V \sigma_x' \frac{N + E A \varepsilon_{xp}}{E A} dV = \int_s \int_A \frac{N'}{A} \frac{N + E A \varepsilon_{xp}}{E A} ds dA = \\ &= \int_s \frac{N'}{A} \frac{N + E A \varepsilon_{xp}}{E A} ds \int_A dA = \int_s N' \frac{N + E A \varepsilon_{xp}}{E A} ds, \end{aligned} \quad (5)$$

ossia, le cose vanno come se in luogo della sollecitazione effettiva  $N$  agisse la sollecitazione ideale  $N + E A \varepsilon_{xp}$ .

Supponiamo ora che lo stato di deformazione effettivo e quello fittizio siano di pura flessione e che le sezioni si conservino piane; allora

$$\varepsilon_x + \varepsilon_{xp} = \mu y \quad (\mu = \text{costante}). \quad (6)$$

Le equazioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione divengono

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x dA = E \int_A \varepsilon_x dA = E \mu \int_A y dA - E \int_A \varepsilon_{xy} dA = 0 \\ M_x &= \int_A \sigma_x y dA = E \int_A \varepsilon_x y dA = E \mu \int_A y^2 dA - E \int_A \varepsilon_{xy} y dA \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Essendo

$$\int_A y dA = 0, \quad \int_A y^2 dA = J,$$

e supposto

$$\int_A \varepsilon_{xy} dA = 0,$$

la prima delle (7) è soddisfatta essendo un'identità, e la seconda dà

$$\mu = \frac{M_x + E \int_A \varepsilon_{xy} y dA}{E J}. \quad (8)$$

Con questo valore, il primo integrale del secondo membro della (1) diviene, indicando con  $M'$  il momento fittizio

$$\begin{aligned} \int_V \sigma'_x \mu y dV &= \int_V \sigma'_x \frac{M_x + E \int_A \varepsilon_{xy} y dA}{E J} y dA = \\ &= \int_s \int_A \frac{M'_x y}{J} \frac{M_x + E \int_A \varepsilon_{xy} y dA}{E J} y ds dA = \\ &= \int_s \frac{M'_x}{J} \frac{M_x + E \int_A \varepsilon_{xy} y dA}{E J} ds \int_A y^2 dA = \\ &= \int_s M'_x \frac{M_x + E \int_A \varepsilon_{xy} y dA}{E J} ds, \end{aligned} \quad (9)$$

ossia, le cose vanno come se in luogo del momento effettivo  $M_x$ , fosse applicato il momento ideale  $M_x + E \int_A \varepsilon_{xy} y dA$ .

Supponiamo ora che gli stati di deformazione fittizio ed effettivo siano di taglio semplice; con un procedimento analogo si trova che in luogo dello sforzo di taglio effettivo  $T$ , si deve considerare come applicato lo sforzo di taglio ideale  $T + G \int_A \gamma_{xy} dA$ ; e così pure nel caso della torsione con sezione circolare (fattore di torsione = 1) si trova che in luogo del momento torcente  $M_t$  si deve introdurre un momento ideale

$$M_t + G \int_A (\gamma_{zy} x - \gamma_{xz} y) dA.$$

In definitiva l'equazione dei lavori virtuali (1) diviene per una sezione qualsiasi

$$\begin{aligned}
 \sum F' \eta_F + \sum C' \eta_C = & \int_s N' \frac{N + E A \varepsilon_{xp}}{E A} ds + \\
 & + \int_s M_x' \frac{M_x + E \int_A \varepsilon_{xp} y dA}{E J} ds + \\
 & + \chi \int_s T' \frac{T + G \int_A \gamma_{xyp} dA}{G A} ds + \\
 & + \int_s M_t' \frac{M_t + G \int_A (\gamma_{zyp} x - \gamma_{zxp} y) dA}{G J_p} ds.
 \end{aligned} \tag{10}$$

b) Le applicazioni. — La (10) si applica ai sistemi elasto-plastici come la analogia dei sistemi elastici.

Rendiamo la struttura staticamente determinata sostituendo ai vincoli sovrabbondanti, le loro reazioni  $X$ , e scriviamo successivamente la (10) prendendo come forze  $F'$  le

$$\left. \begin{aligned} X_1' &= 1, & X_2' &= X_3' = \dots = 0 \\ X_2' &= 1, & X_1' &= X_3' = \dots = 0 \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

avremo con i soliti simboli il sistema di equazioni

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot \eta_{X_1} + \sum C_1' \eta_{C_1} &= \int_s (N + E A \varepsilon_{xp}) \cdot N_1' \frac{ds}{E A} + \\ &+ \int_s (M_x + E \int_A \varepsilon_{xp} y dA) \cdot M_{x1}' \frac{ds}{E J} + \\ &+ \chi \int_s (T + G \int_A \gamma_{xyp} dA) \cdot T_1' \frac{ds}{G A} + \\ &+ \int_s [M_t + G \int_A (\gamma_{zyp} x - \gamma_{zxp} y) dA] \cdot M_{t1}' \frac{ds}{G J_p} \\ 1 \cdot \eta_{X_2} + \sum C_2' \eta_{C_2} &= \int_s (N + E A \varepsilon_{xp}) \cdot N_2' \frac{ds}{E A} + \\ &+ \int_s (M_x + E \int_A \varepsilon_{xp} y dA) \cdot M_{x2}' \frac{ds}{E J} + \\ &+ \chi \int_s (T + G \int_A \gamma_{xyp} dA) \cdot T_2' \frac{ds}{G A} + \\ &+ \int_s [M_t + G \int_A (\gamma_{zyp} x - \gamma_{zxp} y) dA] \cdot M_{t2}' \frac{ds}{G J_p}, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \tag{12}$$



dove  $\eta_{X_1}$  è lo spostamento del punto di applicazione della  $X_1$ , dovuto alle forze effettive nel sistema principale, le  $C'_1$  le reazioni dei vincoli dovute alla  $X'_1$ ,  $\eta_{C_1}$  gli spostamenti dei punti di applicazione delle  $C_i$  dovuti alle forze effettive sempre nel sistema principale,  $N, M_x, \dots$  la componente normale generica, il momento flettente generico  $\dots$  dovuti alle forze effettive ed  $N'_1, M'_{X_1}, \dots$  quelli dovuti alla  $X'_1$ ; ecc. Le  $X$  compaiono poi nelle  $N, M_x, T$ , ed  $M_t$ .

Le (12) risolvono i sistemi iperstatici nel campo elasto-plastico, come quelli analoghe nel campo elastico.

Le cose non sono però in pratica del tutto semplici perchè non si conoscono a priori le zone plasticizzate. Occorre quindi procedere per successive approssimazioni risolvendo dapprima il sistema come se fosse elastico e determinando in base alle sollecitazioni le zone plasticizzate. Solo allora possiamo scrivere le (12) dalle quali si deducono nuovi valori delle reazioni dei vincoli che consentono di determinare con maggiore esattezza le zone plasticizzate e così di seguito.

Le (12) divengono invece molto comode quando le deformazioni non elastiche hanno un'entità ben definita come nel caso di deformazioni impresse, così da creare uno stato di coazione (cfr. il cemento precompresso).

### C. Il teorema variazionale dell'elasto plasticità

a) Il teorema di Colonnetti. — Consideriamo un corpo soggetto a forze esterne  $F$  e a reazioni dei vincoli  $C$  a cui conseguano certe tensioni  $\sigma_x, \sigma_y, \dots$ ; il sistema delle  $F$ , delle  $C$  e delle  $\sigma_x, \sigma_y, \dots$  è in equilibrio. Supponiamo poi che nello stesso corpo queste forze diano origine a spostamenti  $\eta_F$  ed  $\eta_C$  dei loro punti di applicazione nella loro direzione ed a deformazioni certamente congruenti, le quali constano di una parte elastica  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots$  e di una parte plastica  $\varepsilon_{xp}, \varepsilon_{yp}, \dots$ <sup>3</sup>.

Potremo scrivere l'equazione dei lavori (1)

$$\sum F \eta_F + \sum C \eta_C = \int_V [\sigma_x (\varepsilon_x + \varepsilon_{xp}) + \sigma_y (\varepsilon_y + \varepsilon_{yp}) + \dots] dV, \quad (13)$$

essendo  $V$  il volume del solido.

Separando nel secondo membro la parte elastica da quella plastica, abbiamo

$$\begin{aligned} \sum F \eta_F + \sum C \eta_C = & \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \dots) dV + \\ & + \int_V (\sigma_x \varepsilon_{xp} + \sigma_y \varepsilon_{yp} + \dots) dV. \end{aligned} \quad (13')$$

Il primo integrale è il potenziale elastico  $\Phi$  che può essere recuperato<sup>4</sup>, il secondo è un lavoro plastico  $L_p$  che non può essere restituito; ossia

$$\sum F \eta_F + \sum C \eta_C = \Phi + L_p. \quad (14)$$

<sup>3</sup> La parte plastica non viene restituita allo scarico; questa deformazione plastica in generale da sola non è congruente e, per realizzarsi, richiede l'esistenza di un sistema di ulteriori deformazioni (e tensioni) elastiche che rimangono nel corpo sotto forma di energia vincolata.

<sup>4</sup> Eventualmente con tagli in quanto comprende anche l'energia vincolata (nota <sup>3</sup>).

Consideriamo la funzione — che indichiamo con  $L$  — del secondo membro della (14) e pensiamo di conservare invariate le deformazioni plastiche e le forze esterne e di attribuire alle tensioni degli incrementi  $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \dots$  piccolissimi e costituenti un sistema in equilibrio.

La funzione  $L$  subirà una variazione prima

$$\begin{aligned} \delta L = \int_V \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_x} \delta \sigma_x + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_y} \delta \sigma_y + \dots \right] dV + \\ + \int_V [\varepsilon_{xp} \delta \sigma_x + \varepsilon_{yp} \delta \sigma_y + \dots] dV, \end{aligned} \quad (15)$$

od anche

$$\delta L = \int_V [(\varepsilon_x + \varepsilon_{xp}) \delta \sigma_x + (\varepsilon_y + \varepsilon_{yp}) \delta \sigma_y + \dots] dV. \quad (15')$$

Ora  $\delta L$  rappresenta il lavoro che il sistema di tensioni (in equilibrio)  $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \dots$  compirebbe se si attribuisse al corpo la variazione virtuale di configurazione definita dalle  $\varepsilon_x + \varepsilon_{xp}, \varepsilon_y + \varepsilon_{yp}, \dots$  che sono congruenti e compatibili con i vincoli. Per il teorema dei lavori virtuali è quindi

$$\delta L = 0 \quad (16)$$

ossia la variazione prima della funzione  $L$  è nulla.

La variazione seconda è poi positiva perchè — essendo le  $\varepsilon_{xp}, \varepsilon_{yp}, \dots$  costanti — si riduce a

$$\delta^2 L = \int_V \varphi_V (\delta \sigma_x, \delta \sigma_y, \dots) dV \quad (17)$$

essendo  $\varphi_V$  l'espressione del potenziale elementare in funzione delle tensioni, in quanto negli elementi plasticizzati sono costanti le  $\varepsilon_{xp}, \varepsilon_{yp}, \dots$  e quindi

$$\int_V \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{xp}}{\partial \sigma_x} \delta \sigma_x + \dots \right) dV = 0.$$

Nello stato di equilibrio la funzione  $L$  ha quindi un minimo ossia:

Le tensioni interne che caratterizzano lo stato di equilibrio sono quelle che rendono minima la funzione

$$L = \int_V \varphi_V (\sigma_x, \sigma_y, \dots) dV + \int_V (\varepsilon_{xp} \sigma_x + \varepsilon_{yp} \sigma_y + \dots) dV \quad (18)$$

in rapporto a tutti i valori che la funzione stessa può assumere compatibilmente con la deformazione plastica e con le forze esterne date.

b) Il teorema di Domke o di Menabrea generalizzato. — Se si esprimono le  $\sigma_x, \sigma_y, \dots$  in funzione delle forze esterne  $F$  e delle reazioni dei vincoli  $C$ , poichè le  $F$  sono costanti, risulta subito che le reazioni dei vincoli che caratterizzano lo stato di equilibrio sono quelle che rendono minima la funzione  $L$  in rapporto a tutti i valori che la funzione stessa può assumere compatibilmente con la deformazione plastica e con le forze esterne date.

Si vede facilmente che il teorema di Colonnetti e quello di Domke o di Menabrea generalizzato sono la stessa cosa, e che non sono altro che la estensione in campo elasto-plastico degli analoghi teoremi nel campo elastico.

c) Le applicazioni. — Quanto precede porta nelle applicazioni a sostituire alle deformazioni elastiche  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots$  le deformazioni totali  $\varepsilon_x + \varepsilon_{xp}, \varepsilon_y + \varepsilon_{yp}, \dots$  somme di quelle elastiche e di quelle plastiche.

La condizione (18) si traduce, se con  $X_i$  si indica la reazione iperstatica generica, nelle  $n$  equazioni

$$\frac{\partial (\Phi + L_p)}{\partial X_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \dots n) \quad (19)$$

che sono l'estensione al campo elasto-plastico delle analoghe del campo elastico.

Ripetendo il calcolo che ha portato alle (12), le (19) divengono, indicando con  $s$  la lunghezza del solido<sup>5</sup>,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_i} \left[ \frac{1}{2} \int_s \frac{(N + E A \varepsilon_{xp})^2}{E A} ds + \frac{1}{2} \int_s \frac{(M_x + \frac{E}{A} \int \varepsilon_{xp} y dA)^2}{E J} ds + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \chi \int_s \frac{(T + \frac{G}{A} \int \gamma_{yp} dA)^2}{G A} ds \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_s \frac{[M_t + G \int \frac{(\gamma_{xyp} x - \gamma_{xyp} y) dA}{A}]^2}{G J_p} ds \right] = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \dots n) \end{aligned} \quad (19')$$

dove  $N, M_x, T$  e  $M_t$  debbono naturalmente essere espressi in funzione delle  $X_i$ .

## II. Il calcolo delle strutture in campo elasto-plastico con il metodo delle successive approssimazioni e le sue origini storiche

### D. Cenni storici

Questo metodo consiste nel risolvere dapprima il sistema iperstatico come se il suo comportamento fosse elastico e di tener conto poi in un secondo calcolo degli effetti della plasticizzazione nelle zone in cui le tensioni superano il limite elastico, e può essere applicato con procedimenti diversi.

Così sino dai primi anni del secolo (1905) Silvio Canevazzi a Bologna nel suo corso di Ponti insegnava, per il caso di strutture iperstatiche, a non preoccuparsi, in un calcolo di prima approssimazione, condotto secondo l'usuale schema elastico se alcune zone, in numero adeguatamente limitato, risultavano eccessivamente sollecitate, perchè si poteva fare assegnamento sull'intervento di altre zone non completamente impegnate<sup>6</sup>.

<sup>5</sup> Molte volte nelle applicazioni conviene sostituire agli integrali delle sommatorie; i solidi ad asse curvo si dividono in tronchi di lunghezza tale che ciascuno di questi tronchi possa considerarsi come rettilineo.

<sup>6</sup> Io stesso ho sentito (1915) dalla viva voce di Silvio Canevazzi insegnare a tracciare per i ponti in muratura la curva delle pressioni con il metodo di Résal, considerando l'arco come elastico per tutto il suo spessore ed a ripetere poi il calcolo escludendo nella valutazione dei momenti di inerzia quella parte di murature che al primo calcolo era risultata tesa e quindi inerte; con che nel secondo calcolo, essendo state parzializzate le sezioni di tali zone, restavano maggiormente impegnate quelle delle zone rimanenti.

A Silvio Canevazzi va quindi attribuito il merito di avere per primo, certamente in Italia e forse nel mondo, tenuto conto degli effetti della plasticità nelle strutture iperstatiche.



Sulla stessa via, estendendo per la prima volta al cemento armato il procedimento indicato da Canevazzi, si poneva nel 1911 Carlo Parvopassu in un suo accuratissimo studio statico sul Ponte del Risorgimento di Roma, per il quale il calcolo elastico indicava tensioni elevatissime nel calcestruzzo e nel ferro; la parzializzazione delle sezioni adottata da Parvopassu fece apparire meno gravi e non allarmanti le condizioni statiche del ponte<sup>7</sup>.

Di approssimazioni successive si possono considerare i procedimenti che discendono o dal teorema dei lavori virtuali (B) o dal teorema variazionale di Domke, di Menabrea generalizzato, di Colonnetti (C), poichè si vede facilmente che per conoscere l'entità delle zone plasticizzate bisogna avere dapprima risolto il sistema iperstatico supposto elastico. Pure un procedimento di successive approssimazioni si usa per le travature reticolari iperstatiche.

E' importante osservare che può avvenire che, con il crescere dei carichi, parti di struttura, che già erano divenute plastiche, ridiventino elastiche (fenomeno sinteticamente indicato da alcuni con il nome di ritorno).

Se si considerano bene le cose, il metodo di approssimazione successiva non è altro che l'espressione di quanto avviene nella realtà: sotto i carichi le tensioni in certe zone superano il limite elastico, alcune sezioni di parzializzano o si plasticizzano, con che si modificano i valori delle reazioni iperstatiche, al che consegue una ridistribuzione di tensioni che alleggerisce le sezioni più sollecitate ed invece sollecita maggiormente quelle meno gravate; è questo l'adattamento plastico fra sezioni<sup>8</sup> che Silvio Canevazzi indicò come fondamentale per uno studio delle strutture che vada oltre il campo elastico.

*(Ricevuto, Settembre 1960)*

---

<sup>7</sup> Pure un procedimento di successiva approssimazione suggeriva in sostanza nel 1934 Arturo Danusso quando, per interpretare il funzionamento statico del ponte del Risorgimento e più in generale di strutture che in certi tratti con i metodi consueti della teoria della elasticità risultavano troppo sollecitate, proponeva di applicare una distorsione di Volterra, alla quale consegue uno stato di coazione elastica tale da alleggerire le sezioni più sollecitate per gravare invece maggiormente quelle che al calcolo elastico appaiono meno sollecitate. Il metodo di Danusso è una applicazione del metodo delle cerniere plastiche esposto nella sua essenza, sotto il nome di „Tragfähigkeitsmethode“, da Friedrich Bleich nelle sue „Stahlhochbauten“ (1932) e poi ripreso e sviluppato da Prager e da altri, con il nome „di limit design“, molti anni dopo. Il metodo di Danusso consiste nello studiare la struttura quando per la presenza di cerniere plastiche è divenuta staticamente determinata. La formazione di cerniere plastiche, che consente una rotazione relativa alle due sezioni contigue, non differisce essenzialmente dall'imporre una distorsione di Volterra nella sezione della cerniera plastica.

<sup>8</sup> Da non confondere con l'adattamento plastico in una sezione.



# Beitrag zum Problem des unrunder Rohres

Von E. Tremmel, Salzburg

Mit 6 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Zur Berechnung der Spannungen im unrunder Rohrquerschnitt wird ein numerisches Näherungsverfahren entwickelt; die Schnittgrößen werden hierbei auf das deformierte System bezogen und die nichtlinearen Differentialbeziehungen zwischen dem Moment und der Neigung der verformten Mittellinie näherungsweise berücksichtigt.

## I. Problemstellung

In der Praxis des Rohrbaues wird nicht selten die Frage nach dem Einfluß von Unrundheiten oder sonstigen Imperfektionen auf die Beanspruchung der unter Innendruck stehenden Rohre gestellt<sup>1, 2, 3</sup>. Dem der üblichen Bemessung nach der Ringformel zugrundegelegten Membranspannungszustand überlagern sich Biegespannungen, die in manchen Fällen beträchtliche Werte erreichen; es seien hier nur die an Längsschweißnähten nicht selten auftretenden, als „Dächer“ bezeichneten Eckenbildungen<sup>1</sup> erwähnt, bei denen die Zusatzspannungen sogar das Aufplatzen der Schweißnaht bewirken können.

Die Berechnung dieser Spannungen nach der Theorie erster Ordnung, in der die Schnittgrößen auf die unverformte Mittellinie bezogen sind, führt hier allerdings auf zu hohe Werte, da der verhältnismäßig biegeeweiche Rohrquerschnitt bei der Deformation bekanntlich in eine dem Kreis, d. h. dem Stützlinienbogen für hydrostatische Belastung ähnliche Form übergeht. Um ein wirklichkeitstreueres Bild des Spannungsverlaufes zu erhalten, muß daher der Einfluß der Verschiebungen auf den Gleichgewichtszustand berücksichtigt werden; da es sich hier um endliche Deformationen handelt, ist die Linearisierung der zwischen den Differentialquotienten der Biegelinie und dem Moment bestehenden Beziehungen unzulässig.

Die mit der Behandlung derartiger nichtlinearer Probleme verbundenen mathematischen Schwierigkeiten sind bekannt; geschlossene Lösungen lassen sich nur für Sonderfälle oder unter Einführung verschiedener Näherungsannahmen ableiten, deren Gültigkeit auf bestimmte Voraussetzungen, etwa hinsichtlich der Ausgangsform der Mittellinie, beschränkt bleibt. Andererseits erfordern die auf schrittweiser Näherung beruhenden numerischen Verfahren, wenn sie mehr als einen bloß qualitativen Überblick geben sollen, einen beträchtlichen Rechenaufwand. Durch die Möglichkeit des Einsatzes programmgesteuerter Rechenautomaten treten jedoch diese Methoden, die ja im wesentlichen auf der Wiederholung gleichartiger Operationen aufgebaut sind, gegenüber anderen Berechnungsarten immer mehr in den Vordergrund.

Wir wollen im folgenden ein derartiges Verfahren entwickeln, bei dem 1. die Schnittgrößen auf das verformte System bezogen und 2. die nichtlinearen Beziehungen zwischen Moment und Ableitung der Biegelinie näherungsweise berücksichtigt werden<sup>4</sup>.

<sup>1</sup> K. Schmidt, Zur Spannungsberechnung unrunder Rohre unter Innendruck, VDI Ztschr. 98 (1956) Nr. 4, S. 121/25.

<sup>2</sup> H. Wagner, Einfache Spannungsberechnung unrunder Rohre unter Innendruck, ebenda 98 (1956) Nr. 20, S. 1053/54.

<sup>3</sup> J. Kilpa, Über den Einfluß der Unrundheit eines Druckbehälters, ebenda 101 (1959) Nr. 11, S. 421/29.

<sup>4</sup> Von R. Kappus wurde eine ähnliche, unmittelbar an das Lord Kelvin'sche Krümmungskreisverfahren anknüpfende Näherungsmethode entwickelt, die sich bei entsprechender Modifikation auch auf unser Problem erweitern ließe. (R. Kappus, Luftf.-Forsch. 1937, S. 445.)

Im übrigen wird die Berechnung unter den üblichen Annahmen der Baustatik wie Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes, Ebenbleiben der Querschnitte usw. durchgeführt.

## II. Koordinaten; allgemeine Beziehungen

Wir betrachten den Rohrquerschnitt, also einen unter Innendruck stehenden Ring mit einer von der Kreisform abweichenden Mittellinie, dessen Wandstärke  $d$  klein gegenüber dem mittleren „Durchmesser“ aber sonst beliebig veränderlich sei.

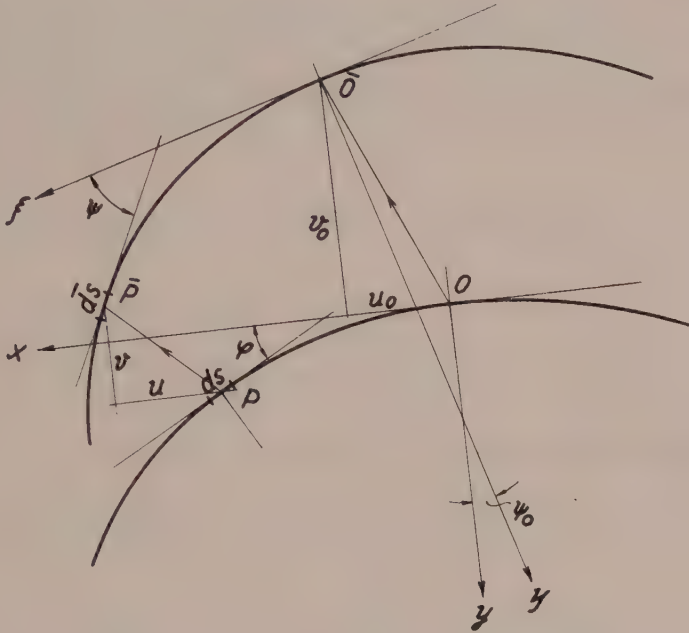


Abb. 1. Bezeichnungen und Koordinatensysteme

Die geometrische Form der Ausgangslage sei bezüglich eines durch die Tangente und die Normale der Mittellinie in einem beliebigen Punkt  $O$  gelegten kartesischen Systems  $x, y$ , durch ihre Gleichung etwa in Form einer Fourierschen Reihe gegeben. Bei der Deformation gehe der Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $x, y$  in den Punkt  $\bar{P}$  mit den auf die Ausgangslage bezogenen Koordinaten  $x + u$  und  $y + v$ , der Ursprung  $O$  demnach in den Punkt  $\bar{O}$  mit den Koordinaten  $u_0$  und  $v_0$  über. Die Tangente in  $\bar{O}$  verdrehe sich gegenüber ihrer ursprünglichen Lage um den Winkel  $\psi_0$ . Das gegenüber der Ausgangslage um  $u_0, v_0$  verschobene und den Winkel  $\psi_0$  verdrehte Achsenkreuz bezeichnen wir im weiteren mit  $\xi$  und  $\eta$  (Abb. 1).

Der unverformten Mittellinie seien ferner zugeordnet: das Längenelement  $ds$ , der Krümmungshalbmesser  $r$  und die Neigung  $\varphi$  der Kurvennormalen gegen die positive  $y$ -Achse. Bei der Deformation gehe  $ds$  in  $\bar{d}s$ ,  $r$  in  $\bar{r}$  und  $\varphi$  in  $\bar{\varphi}$  bzw.  $\psi$  über, wobei  $\psi$  die Neigung der bei der Deformation verdrehten (und verschobenen) Kurventangente gegen die positive  $\xi$ -Achse bezeichnet.

In der folgenden Zusammenstellung sind diese Zusammenhänge übersichtlich dargestellt:

Mittellinie		
unverformt		verformt
$x, y$	$\rightarrow$	$x + u, y + v$ bzw. $\xi, \eta$
$ds$	$\rightarrow$	$\bar{ds}$
$r$	$\rightarrow$	$\varrho$
$\varphi$	$\rightarrow$	$\bar{\varphi}$ bzw. $\psi$ .

Mit den Bezeichnungen für die auf die Längeneinheit der Erzeugenden bezogenen Schnittgrößen, d. h. die Momente  $M$ , Normalkräfte  $N$  und Querkräfte  $Q$  (der Index  $\varphi$  bleibt bei den Schnittgrößen weg, da hier nur Wirkungen in der Querschnittsebene untersucht werden), können wir die zwischen  $ds$  und  $\bar{ds}$  bestehende Beziehung sofort anschreiben; es ist

$$\bar{ds} = (1 + \varepsilon_\varphi) ds, \quad (1)$$

wobei  $\varepsilon_\varphi$  die von der am Element  $ds$  wirkenden Normalkraft  $N$  hervorgerufene Längsverzerrung ist, also

$$\varepsilon_\varphi = \frac{N}{E^* F} \quad (2)$$

gilt; wegen der behinderten Querdehnung ist  $E$  durch  $E^* = \frac{E}{1 - \nu^2}$  zu ersetzen.

Aus der Differentialgleichung der deformierten Mittellinie

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r} = \frac{M}{E^* J}, \quad (3)$$

erhalten wir durch Multiplikation mit  $\bar{ds}$

$$\frac{\bar{ds}}{\varrho} - \frac{\bar{ds}}{r} = \frac{M}{E^* J} \bar{ds}, \quad (4)$$

woraus wegen  $ds = r d\varphi$  und  $\bar{ds} = \varrho d\bar{\varphi}$  unter Beachtung von (1)

$$d\varphi - (1 + \varepsilon_\varphi) d\varphi = \frac{M}{E^* J} (1 + \varepsilon_\varphi) ds \quad (5)$$

folgt und daraus mit

$$d\bar{\varphi} - d\varphi = \frac{M}{E^* J} (1 + \varepsilon_\varphi) ds + \varepsilon_\varphi d\varphi, \quad (6)$$

die Beziehung zwischen der Verdrehung des Bogenelementes und dem auf die verformte Mittelachse bezogenen Biegemoment  $M$  sowie — zufolge (2) — der Normalkraft  $N$ . Der zweite Term, den wir auch in der Form  $\varepsilon_\varphi d\varphi = \frac{N}{E^* d} \frac{ds}{r}$  anschreiben können, ist bei der vorausgesetzten geringen Wandstärke klein gegenüber dem ersten, da die Momente von der Größenordnung  $p r^2$ , die Normalkräfte von der Größenordnung  $p r$

sind und daher mit  $J = \frac{d^3}{12}$

$$\frac{N}{r} \ll \frac{12 M}{d^2} \quad (7)$$

wird.

Wir werden also hier im weiteren den Einfluß der Längenänderungen vernachlässigen. Bei einem dünnwandigen durch hydrostatischen Druck belasteten Kreisbogensegment, bei dem Biegespannungen nur als Folge von Längenänderungen der Bogenachse auftreten können, muß dagegen  $\varepsilon_\varphi$  offenbar berücksichtigt werden.

Für  $\varepsilon_\varphi \doteq 0$  erhalten wir aus (6)

$$d\bar{\varphi} - d\varphi = \frac{M}{E^* J} ds. \quad (8)$$

Mit dem Winkel  $\psi$ , den die Tangente im Punkt  $P(s)$  der verformten Mittellinie mit der Achse  $\xi$  des Koordinatensystems einschließt, geht (8) wegen

$$\psi = \bar{\varphi} - \psi_0 \quad (9)$$

also

$$d\psi = d\bar{\varphi} \quad (10)$$

über in die Differentialgleichung

$$d\psi - d\varphi = \frac{M}{E^* J} ds. \quad (11)$$

### III. Numerische Integration der Differentialgleichung

$$d\psi - d\varphi = \frac{M}{E^* J}.$$

Zur Darstellung des auf die verformte Bogenachse bezogenen Momente  $M$  denken wir uns diese im Ursprung 0 des Koordinatensystems aufgeschnitten und bringen dort die Schnittgrößen  $M_0$ ,  $N_0$  und  $Q_0$  an, für deren Werte zunächst, etwa auf Grund der linearisierten Theorie, Annahmen zu treffen sind. Bei der gegebenen hydrostatischen Belastung und dem gewählten positiven Richtungssinn der Schnittgrößen wird dann (Abb. 2)

$$M = M_0 + N_0 \eta + Q_0 \xi - \frac{p}{2} (\xi^2 + \eta^2); \quad (12a)$$

$$N = N_0 \cos \psi - Q_0 \sin \psi + p (\xi \sin \psi - \eta \cos \psi) \quad (12b)$$

$$Q = N_0 \sin \psi + Q_0 \cos \psi - p (\xi \cos \psi + \eta \sin \psi). \quad (12c)$$

Gemäß der oben getroffenen Festlegung fallen die Richtungen von  $N_0$  und  $Q_0$  mit denen der Achsen  $\xi$  bzw.  $\eta$  zusammen.

Wir hätten (12) in (11) einzusetzen, diese Differentialgleichung zu integrieren und würden so schließlich  $\xi$  und  $\eta$  als Funktionen von  $s$  bzw.  $\varphi$  erhalten. Da aber — wie schon eingangs erwähnt — die geschlossene Integration der Differentialgleichung bei



beliebiger Ausgangslage der Mittellinie und veränderlichem Trägheitsmoment  $J$  im allgemeinen nicht möglich ist, soll (11) unter Verwendung des im folgenden beschriebenen Näherungsverfahrens integriert werden.

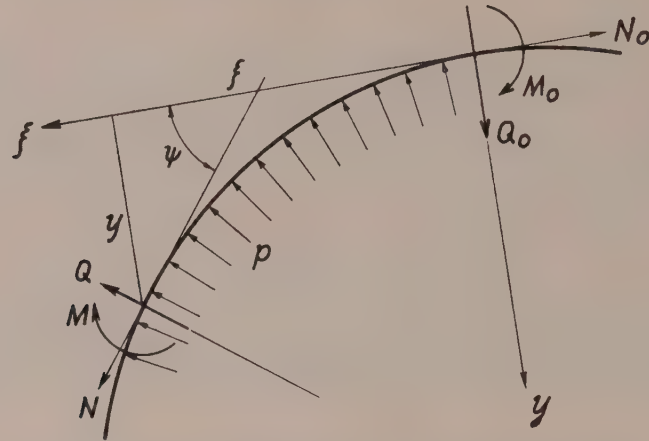


Abb. 2. Positive Schnittgrößen am verformten System

Wir stellen vorerst den Zuwachs, den die Winkeländerung  $\psi - \varphi$  beim Fortschreiten um ein endlich kleines Intervall  $\Delta s$  erfährt, dar, indem wir in (11) die Differentiale durch Differenzen ersetzen und erhalten so

$$\Delta \psi - \Delta \varphi = \frac{1}{E} \left( \frac{M}{J} \right)_m \Delta s, \quad (13)$$

wobei  $\left( \frac{M}{J} \right)_m$  den Mittelwert der Funktion  $\frac{M}{J}$  innerhalb des Intervalls  $\Delta s$  bedeuten

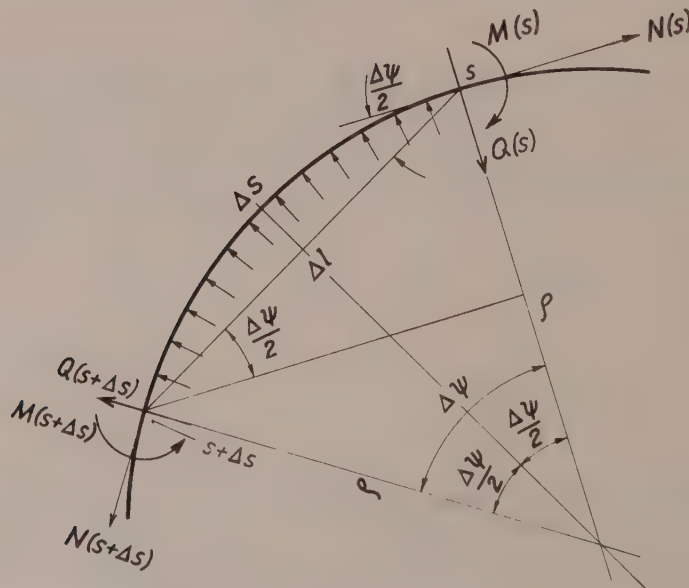


Abb. 3. Zur Bestimmung der Änderung der Schnittgrößen beim Fortschreiten um ein kleines Intervall  $\Delta s$

möge. Die Werte des (veränderlichen) Trägheitsmomentes an den Stellen  $s$  und  $s + \Delta s$  seien bekannt; das in  $s + \Delta s$  wirkende Biegemoment kann in der Form

$$M(s + \Delta s) = M(s) + \Delta M(s, s + \Delta s) \quad (14)$$

angeschrieben werden. Wird innerhalb des Intervalles  $\Delta s$  für die Funktion  $\frac{M}{J}$  ein linearer Verlauf angenommen, dann ergibt sich

$$\left(\frac{M}{J}\right)_m = \frac{1}{2} \left( \frac{M(s)}{J(s)} + \frac{M(s) + \Delta M(s, s + \Delta s)}{J(s + \Delta s)} \right) \quad (15)$$

und wir erhalten damit aus (13)

$$\Delta \psi - \Delta \varphi = \frac{\Delta s}{2E} \left[ M(s) \left( \frac{1}{J(s)} + \frac{1}{J(s + \Delta s)} \right) + \frac{\Delta M(s, s + \Delta s)}{J(s + \Delta s)} \right]. \quad (16)$$

Für den Momentenzuwachs  $\Delta M(s, s + \Delta s)$  entnehmen wir der Abb. 3, wenn  $\Delta s$  so klein angenommen wird, daß die Änderung des Krümmungshalbmessers  $\varrho$  innerhalb des Intervalles vernachlässigt werden kann,

$$\Delta M(s, s + \Delta s) = N(s) \sin \frac{\Delta \psi}{2} + Q(s) \cos \frac{\Delta \psi}{2} \Delta l - \frac{p}{2} (\Delta l)^2, \quad (17)$$

wobei also

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho} \div \frac{\Delta r}{r} \div 0 \quad (18)$$

gelten soll. Die zu  $\Delta s$  gehörige Sehne ist hierbei durch

$$\Delta l = 2 \varrho \sin \frac{\Delta \psi}{2} \quad (19)$$

gegeben; mit  $\Delta s = \varrho \Delta \psi$  verifiziert man leicht die Beziehung

$$\Delta l = 2 \Delta s \frac{\sin \frac{\Delta \psi}{2}}{\frac{\Delta \psi}{2}}. \quad (20)$$

Wird (17) unter Berücksichtigung von (20) in (16) eingeführt, so erhält man in

$$\begin{aligned} \Delta \psi - \Delta \varphi = \frac{\Delta s}{2E} & \left\{ M(s) \left( \frac{1}{J(s)} + \frac{1}{J(s + \Delta s)} \right) + \frac{\Delta s}{J(s + \Delta s)} \frac{2 \sin \frac{\Delta \psi}{2}}{\Delta \psi} \left[ N(s) \sin \frac{\Delta \psi}{2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + Q(s) \cos \frac{\Delta \psi}{2} - \frac{p}{2} \Delta s \frac{2 \sin \frac{\Delta \psi}{2}}{\Delta \psi} \right] \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

eine transzendente Gleichung, aus der bei bekannten Werten von  $M(s)$ ,  $N(s)$  und  $Q(s)$  der Zuwachs  $\Delta \psi$  der Tangentenneigung  $\psi$  bestimmt werden kann. Mit  $\Delta \psi$  lassen sich weiter die Werte von  $\Delta M$  bzw.  $M(s + \Delta s)$  aus (17) und (14) und schließlich die Koordinatendifferenzen gemäß

$$\Delta \xi(s + \Delta s, \Delta s) = \Delta s \frac{2 \sin \frac{\Delta \psi}{2}}{\Delta \psi} \cos \left( \psi + \frac{\Delta \psi}{2} \right) \div \Delta s \left( 1 - \frac{(\Delta \psi)^2}{24} \right) \cos \left( \psi + \frac{\Delta \psi}{2} \right) \quad (22a)$$

$$\Delta \eta(s + \Delta s, \Delta s) = \Delta s \frac{2 \sin \frac{\Delta \psi}{2}}{\Delta \psi} \sin \left( \psi + \frac{\Delta \psi}{2} \right) \doteq \Delta s \left( 1 - \frac{(\Delta \psi)^2}{24} \right) \sin \left( \psi + \frac{\Delta \psi}{2} \right) \quad (22b)$$

berechnen.

Wir können daher, von der Schnittstelle  $\bar{O}$  ausgehend, für welche die Größen  $M_0$ ,  $N_0$  und  $Q_0$  angenommen wurden und die Koordinaten  $\xi = \eta = 0$  sowie die Tangenten-  
neigung  $\psi = 0$  bekannt sind, die den einzelnen Intervallen zugeordneten Werte  $\Delta \psi$ ,  $\Delta M$  sowie die Koordinatendifferenzen und Koordinaten  $\xi$ ,  $\eta$  der verformten Mittellinie schrittweise berechnen. Die bezüglich der Werte von  $M_0$ ,  $N_0$  und  $Q_0$  getroffenen Annahmen waren richtig, wenn die auf diese Weise bestimmte neue Gleichgewichtslage der Mittellinie die Stetigkeitsbedingungen an der Schnittstelle  $\bar{O}$  erfüllt, d. h., wenn wir für  $\sum \Delta \varphi = 2\pi$ , also nach einem vollen Umlauf wieder zum Ausgangspunkt  $\bar{O}$  gelangen und ferner auch  $\sum \Delta \psi = 2\pi$  wird.

Bevor wir uns jedoch ausführlicher mit den Randbedingungen befassen, wollen wir noch näher auf (21) eingehen. Wird im zweiten Term die Multiplikation, mit

$$2 \frac{\sin \frac{\Delta \psi}{2}}{\Delta \psi} \text{ ausgeführt, so folgt}$$

$$\begin{aligned} \Delta \psi - \Delta \varphi = \frac{\Delta s}{2E} \left\{ M(s) \frac{1}{J(s)} + \frac{1}{J(s + \Delta s)} + \right. \\ \left. + \frac{\Delta s}{J(s + \Delta s)} \left[ \left( N(s) - p \frac{\Delta s}{\Delta \psi} \right) \frac{1 - \cos \Delta \psi}{\Delta \psi} + Q(s) \frac{\sin \Delta \psi}{\Delta \psi} \right] \right\}. \quad (21a) \end{aligned}$$

Die hinsichtlich der Größenordnung des Verhältnisses  $\frac{\Delta \varrho}{\varrho}$  getroffene Voraussetzung (18) erfordert hinreichend enge Intervalle  $\Delta s$ , die im Bereich der größten Änderungen des Krümmungshalbmessers gegebenenfalls zu verkleinern sind. Wir werden also den Quadranten in mindestens 10 Intervalle unterteilen; dann ist  $\Delta \varphi = \frac{\pi}{20}$  und da  $\Delta \psi$  von der gleichen Größenordnung sein muß, können in den Reihenentwicklungen der in (21a) auftretenden Funktionen die Glieder höherer als der dritten Potenz vernachlässigt werden, wie in (22) bereits vorweggenommen wurde.

Mit

$$\frac{1 - \cos \Delta \psi}{\Delta \psi} = \frac{\Delta \psi}{2} - \frac{(\Delta \psi)^3}{24} + \frac{(\Delta \psi)^5}{720} - + \dots \quad (22)$$

$$\frac{1 - \cos \Delta \psi}{(\Delta \psi)^2} = \frac{1}{2} - \frac{(\Delta \psi)^2}{24} + \frac{(\Delta \psi)^4}{720} - + \dots \quad (23)$$

$$\frac{\sin \Delta \psi}{\Delta \psi} = 1 - \frac{(\Delta \psi)^2}{6} + \frac{(\Delta \psi)^4}{120} - + \dots \quad (24)$$

folgt für den in (21a) innerhalb der eckigen Klammer stehenden Term:

$$\begin{aligned} \left( N(s) - p \frac{\Delta s}{\Delta \psi} \right) \frac{1 - \cos \Delta \psi}{\Delta \psi} + Q(s) \frac{\sin \Delta \psi}{\Delta \psi} = \\ = \frac{1}{2} \left[ N(s) \left( \Delta \psi - \frac{(\Delta \psi)^3}{12} \right) - p \Delta s \left( 1 - \frac{(\Delta \psi)^2}{12} \right) + 2 Q(s) \left( 1 - \frac{(\Delta \psi)^2}{6} \right) \right]. \quad (25) \end{aligned}$$

Wird (25) in (21a) eingeführt, wobei wir an Stelle der Argumente  $s$  und  $s + \Delta s$  nun die Indizes  $n$  bzw.  $n + 1$  verwenden, so erhält man nach einigen Zwischenrechnungen für  $\Delta \psi_{n,n+1}$  die kubische Gleichung

$$\begin{aligned} (\Delta \psi_{n,n+1})^3 - \frac{1}{N_n} (p \Delta s_{n,n+1} - 4 Q_n) (\Delta \psi_{n,n+1})^2 + \\ + 12 \left( \frac{4 E J_{n+1}}{N_n (\Delta s_{n,n+1})^2} - 1 \right) \Delta \psi_{n,n+1} - \frac{24}{N_n} \left[ \frac{M}{\Delta s_{n,n+1}} \left( \frac{J_{n+1}}{J_n} + 1 \right) + \right. \\ \left. + Q_n - \frac{p \Delta s_{n,n+1}}{2} + \frac{2 E J_{n+1}}{(\Delta s_{n,n+1})^2} \Delta \varphi_{n,n+1} \right] = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

deren Koeffizienten dimensionslos sind. Für eine ursprünglich kreisförmige Mittellinie und endliche Belastung verschwindet die linke Seite wegen  $M = Q = 0$  und  $N = p r$  sowie  $\Delta s = \varrho \Delta \psi = r \Delta \varphi$  identisch, wie es sein muß.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß für geringe Abweichungen von der Kreisform oder für kleinere Innendrucke an Stelle von  $\Delta \psi$  der Wert

$$\Delta (\Delta \varphi) = \vartheta = \Delta \psi - \Delta \varphi, \quad (27)$$

der dann gegenüber  $\Delta \varphi$  und  $\Delta \psi$  klein von höherer Ordnung ist, als Unbekannte eingeführt werden kann.

Mit 
$$\Delta \psi = \Delta \varphi + \vartheta \quad (28)$$

erhalten wir nach einigen Zwischenrechnungen:

$$\vartheta = \frac{24 \left[ \frac{M_n}{\Delta s_{n,n+1}} \left( \frac{J_{n+1}}{J_n} + 1 \right) + Q_n - \frac{p \Delta s_{n,n+1}}{2} \right] + 12 N_n \Delta \varphi + (p \Delta s_{n,n+1} - 4 Q_n) \Delta \varphi_{n,n+1}^2 - N_n \Delta \varphi_{n,n+1}^3}{12 \left( \frac{4 E J_{n+1}}{\Delta s_{n,n+1}^2} - N_n \right) - 2 (p \Delta s_{n,n+1} - 4 Q_n) \Delta \varphi_{n,n+1} + 3 N_n \Delta \varphi^2} \quad (29)$$

und nach weiterer Umformung in

$$\vartheta_{n,n+1} = \frac{\frac{\Delta s_{n,n+1}}{2 E J_{n+1}} \left\{ M_n \left( \frac{J_{n+1}}{J_n} + 1 \right) + \Delta s_{n,n+1} \left[ \frac{1}{2} (N_n \Delta \varphi_{n,n+1} - p \Delta s_{n,n+1}) \left( 1 - \frac{\Delta \varphi_{n,n+1}^2}{12} \right) + Q_n \left( 1 - \frac{\Delta \varphi_{n,n+1}^2}{6} \right) \right] \right\}}{1 - \frac{\Delta s_{n,n+1}^2}{24 E J_{n+1}} \left[ 6 N_n \left( 1 - \frac{\Delta \varphi_{n,n+1}^2}{4} \right) + (p \Delta s_{n,n+1} - 4 Q_n) \Delta \varphi_{n,n+1} \right]} \quad (30)$$

einen hinreichend genauen Näherungswert, der unmittelbar berechnet werden kann.

Mit  $\vartheta_{n,n+1}$  wird  $\Delta \psi_{n,n+1}$  gemäß (28) und schließlich die Tangentenneigung im Punkt  $n + 1$  aus  $\psi_{n+1} = \psi_n + \Delta \psi_{n,n+1}$  bestimmt.

#### IV. Sonderfälle

Mit Hilfe des vorstehend entwickelten Verfahrens lassen sich auch die durch Unstetigkeiten in der Ausgangsform der Mittellinie bedingten Sonderfälle einfach erledigen. Enthält das Rohr ebene Flächen, die Mittellinie demnach geradlinige Strecken, dann verschwindet in diesen Bereichen wegen  $\Delta \varphi = \frac{\Delta s}{r}$  und  $r \rightarrow \infty$  der Kontingenzwinkel  $\Delta \varphi$  der unverformten Mittellinie, während  $\Delta s$  endlich bleibt; unter den gleichen Voraussetzungen wie oben, d. h. bei hinreichend kleinem Intervall  $\Delta s \neq 0$ , gelten die Gln. (26) bzw. (30), in denen nun  $\Delta \varphi = 0$  zu setzen ist, auch für diesen Sonderfall.



Sind andererseits Ecken, also Unstetigkeiten in  $y'$  vorhanden (Abb. 4), wobei es belanglos bleibt, ob die anschließenden Bereiche geradlinig oder gekrümmt sind, dann können wir diese als Stellen unendlicher Krümmung auffassen.

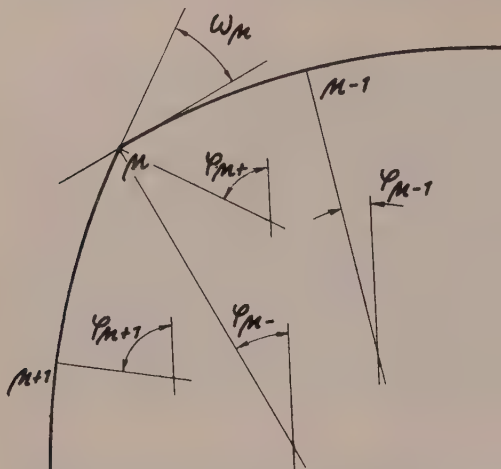


Abb. 4. Unstetigkeit in  $y'$  (Eckenbildung) an der Stelle  $\mu$

Mit

$$\Delta\varphi = \omega_\mu = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{r} = \frac{0}{0}$$

verschwinden hier  $\Delta s$  und  $r$ ; aus  $\Delta\psi =$

$$-\Delta\varphi = \int_{s-\alpha}^{s+\alpha} \frac{M}{EJ} ds \text{ folgt mit } \alpha \rightarrow 0, \Delta\psi =$$

$= \Delta\varphi = \omega_\mu$ , wobei der Winkel, den die beiden Tangenten im Punkt  $\mu$  miteinander einschließen, mit  $\omega_\mu$  bezeichnet ist. Die Unstetigkeit von  $y'$  bleibt bei der Deformation — wenn die praktisch belanglosen Längenänderungen vernachlässigt werden — in ihrer vollen Größe erhalten. Bezeichnen wir die knapp vor dem Eckpunkt  $\mu$  auftretenden Größen mit dem

Index  $\mu-$ , die nach dem Eckpunkt auftretenden mit dem Index  $\mu+$ , dann gilt

$$\varphi_{\mu-} = \varphi_{\mu-1} + \Delta\varphi_{\mu,\mu-1} \quad (31a)$$

$$\varphi_{\mu+} = \varphi_{\mu-1} + \Delta\varphi_{\mu,\mu-1} + \omega_\mu \quad (31b)$$

und analog

$$\psi_{\mu-} = \psi_{\mu-1} + \Delta\psi_{\mu,\mu-1} = \psi_{\mu-1} + \Delta\varphi_{\mu,\mu-1} + \vartheta_{\mu,\mu-1} \quad (32a)$$

$$\psi_{\mu+} = \psi_{\mu-} + \omega_\mu; \quad (32b)$$

für die Schnittgrößen folgt schließlich

$$M_{\mu+} = M_{\mu-}$$

$$N_{\mu+} = N_{\mu-} \cos \omega_\mu - Q_{\mu-} \sin \omega_\mu \quad (33)$$

$$Q_{\mu+} = N_{\mu-} \sin \omega_\mu + Q_{\mu-} \cos \omega_\mu. \quad (34)$$

Werden die Intervalle so ausgeteilt, daß eine Grenze mit der Unstetigkeitsstelle zusammenfällt, dann läßt sich die Berechnung der Werte  $\Delta\psi_{n,n+1}$  bzw.  $\vartheta_{n,n+1}$  unter Beachtung der Beziehungen (31) bis (34) wie im allgemeinen Falle durchführen.

## V. Randbedingungen

Die oben genannten Randbedingungen können offenbar wie folgt formuliert werden:

$$\text{für } \Delta\varphi = 2\pi \text{ gilt } \sum \Delta\psi = 2\pi \quad (35)$$

$$\sum \Delta\xi = 0 \quad (36)$$

$$\sum \Delta\eta = 0, \quad (37)$$

wobei sich (35) wegen (27) durch die gleichwertige Bedingung

$$\sum \vartheta = 0 \quad (35a)$$

ersetzen läßt.

Wie bei den meisten nichtlinearen Problemen können die Integrationskonstanten, im vorliegenden Falle also die in  $\bar{O}$  angebrachten Schnittgrößen  $M_0$ ,  $N_0$  und  $Q_0$ , nicht direkt berechnet werden. Man wird daher, etwa ausgehend von den Werten, die diese Größen bei Vernachlässigung des Einflusses der Verschiebungen, d. h. nach der Theorie erster Ordnung annehmen, die Gln. (35) bis (37) durch Probieren lösen. Sind hiebei  $M_{0L}$ ,  $N_{0L}$ ,  $Q_{0L}$  die nach der linearisierten Theorie für den Punkt 0 berechneten Schnittgrößen, dann muß offenbar

$$M_{0L} > M_0$$

und

$$Q_{0L} > Q_0$$

gelten, während über die zwischen den Normalkräften  $N_{0L}$  und  $N_0$  bestehenden Größenbeziehungen, die von der Lage des gewählten Ursprunges  $O$ , d. h. der Schnittstelle abhängen, keine allgemeinen Aussagen getroffen werden können. Aus (30) ist ferner zu ersehen, daß der Einfluß der Momente  $M$  auf die durch  $\vartheta = \Delta\psi - \Delta\varphi$  dargestellten Verdrehungselemente und damit auf die gesuchte Form der Mittellinie die Einflüsse der Größen  $N$  und  $Q$  überwiegt. Dadurch zeichnet sich der folgende Rechnungsgang ab: Man sucht zunächst einen Wert  $M_{0(1)}$  zu gewinnen, der der Randbedingung (35) bzw. (35a) genügt, wobei in (26) oder (30) die Größen  $N_{0L}$  und  $Q_{0L}$  eingeführt werden. Nun wird die Erfüllung der Randbedingungen (36) und (37) unter Verwendung der Theorie erster Ordnung erzwungen, wodurch sich Verbesserungen  $\Delta M_0$ ,  $\Delta N_{0L}$  und  $\Delta Q_{0L}$  ergeben. Wir berechnen nun — unter Außerachtlassung von  $\Delta M_0$  — die Größen  $N_{0(1)} = N_{0L} + \Delta N_{0L}$  und  $Q_{0(1)} = Q_{0L} + \Delta Q_{0L}$  und bestimmen wie vorher einen Näherungswert  $M_{0(2)}$ , mit dem, wenn in (26) oder (30) nun die Größen  $N_{0(1)}$  und  $Q_{0(1)}$  eingeführt werden, die Randbedingung (35) bzw. (35a) erfüllt wird. Der Vorgang ist zu wiederholen bis die aus (30) und (22) berechneten Werte  $\vartheta$ ,  $\Delta\xi$  und  $\Delta\varphi$  allen drei Randbedingungen genügen.

Erhält man nach dem ersten Rechnungsgang aus den Randbedingungen (36) bzw. (37) die Differenzen

$$\sum \Delta\xi = \Delta\xi$$

$$\sum \Delta\eta = \Delta\eta,$$

während (35) voraussetzungsgemäß erfüllt ist, so können die Verbesserungen nach der Theorie erster Ordnung bekanntlich aus den drei Elastizitätsgleichungen

$$\Delta M_0 \int \frac{ds}{J} + \Delta N_{0L} \int \frac{\eta ds}{J} + \Delta Q_{0L} \int \frac{\xi ds}{J} = 0 \quad (38)$$

$$\Delta M_0 \int \frac{\eta ds}{J} + \Delta N_{0L} \int \frac{\eta^2 ds}{J} + \Delta Q_{0L} \int \frac{\xi \eta ds}{J} = -E \Delta\xi \quad (39)$$

$$\Delta M_0 \int \frac{\xi ds}{J} + \Delta N_{0L} \int \frac{\xi \eta ds}{J} + \Delta Q_{0L} \int \frac{\xi^2 ds}{J} = -E \Delta\eta \quad (40)$$

berechnet werden, wobei hier auf die Transformation zur Gewinnung unabhängiger Gleichungen verzichtet wird.

Bei einfacher Symmetrie der unverformten Mittellinie wird der Ursprung  $O$  auf einem der beiden Schnittpunkte mit der Symmetrieachse anzunehmen sein. Hat die Mittellinie an dieser Stelle eine Ecke, dann fällt die Normalkraft  $N_0$  nicht in die Normale zur Symmetrieebene. Als statisch unbestimmte Kraft wählt man in diesem Falle besser die in  $\bar{O}$  angreifende, zur Symmetrieebene normale Kraft  $N_0^*$ ; schließen die beiden Tangenten in  $O$  bzw.  $\bar{O}$  den Winkel  $\omega_0$  ein, dann gilt wie oben

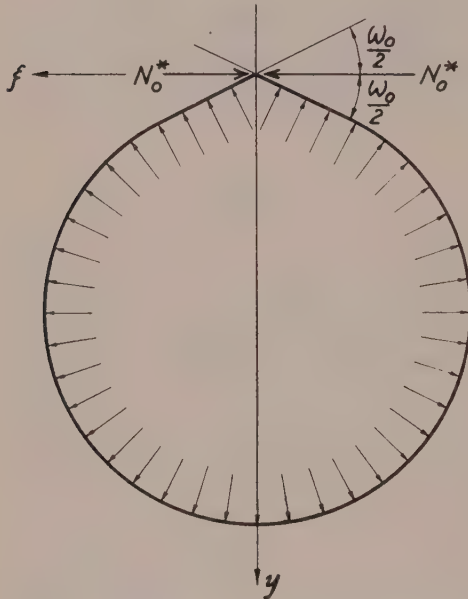


Abb. 5. Einfach symmetrisches System mit Eckenbildung

$$N = N_0^* \cos \psi + p (\xi \sin \psi - \eta \cos \psi)$$

$$Q = N_0^* \sin \psi - p (\xi \cos \psi + \eta \sin \psi)$$

und hier speziell (Abb. 5)

$$N_0 = N_0^* \cos \frac{\omega}{2}$$

$$Q_0 = N_0^* \sin \frac{\omega}{2}.$$

Bei Symmetrie, etwa in bezug auf die  $y$ -Achse, lauten die Randbedingungen für

$$\varphi = \pi, \quad \sum \Delta \psi_{n,n+1} = \pi$$

$$\text{bzw. } \sum \vartheta_{n,n+1} = 0 \quad (41)$$

und

$$\sum \Delta \xi_{n,n+1} = 0. \quad (42)$$

Unter Verwendung eines nach der Theorie erster Ordnung bestimmten Näherungswertes der Scheitelnormalkraft  $N_0$  (bzw. im Falle einer Ecke der Kraft  $N_0^*$ ) wird

$M_0$  durch Probieren so ermittelt, daß die Randbedingung (41) erfüllt ist. Nach der linearen Theorie wird nun für die verformte Mittellinie ein Wert  $\Delta N_{0L}$  berechnet, der die bei der Randbedingung (42) verbliebene Differenz  $\sum \Delta \xi_{n,n+1}$  tilgt. Unter Einführung von  $N_{0L} + \Delta N_{0L}$  in (26) oder (30) bestimmt man einen neuen, der Randbedingung (41) genügenden Näherungswert  $M_{0(2)}$ . Der Vorgang wird so lange wiederholt, bis mit den aus (26) oder (30) berechneten Werten  $\Delta \psi_{n,n+1}$  bzw.  $\vartheta_{n,n+1}$  und  $\Delta \xi_{n,n+1}$  beide Randbedingungen erfüllt werden.

Bei doppelter Symmetrie muß aus Gleichgewichtsgründen

$$N_0 = p (b + v_0)$$

sein (Abb. 6).

Der in diesem Falle einzuschlagende Weg ist trivial: Wir bestimmen für verschiedene angenommene Werte der Scheitelverschiebung  $v_0$  einen ersten Näherungswert von  $M_0$ , mit dem die Randbedingung (35) erfüllt wird; in der Umgebung jenes Werte von  $v_0$ , für den zugleich die Abweichung von der Bedingung  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\sum \Delta \eta_{n,n+1} = b + v_0$  ihren kleinsten Absolutwert hat, wird der gleiche Vorgang wiederholt. Ist  $r_0$  der Halbmesser jenes Kreises, dessen Umfang mit dem der Mittellinie übereinstimmt, dann kann  $v_0$  offenbar durch die Ungleichung  $0 < v_0 < r_0 - b$  eingeschränkt werden.

Im übrigen kann der zuletzt geschilderte Rechnungsgang immer dann, wenn nur zwei Bedingungen zu erfüllen sind, angewandt werden.



## VI. Praktische Durchführung

Wir gehen noch kurz auf die praktische Durchführung des Verfahrens ein und wiederholen die wichtigsten Rechnungsgänge in ihrer Reihenfolge:

1. Intervallanzahl  $n \rightarrow \Delta\varphi_{v+1,v} = \frac{2\pi}{n}$ ;

2. Transformation der Gleichung der unverformten Mittellinie auf das durch Tangente und Normale im Punkt  $O$  gegebene Koordinatensystem  $x, y$ :  $F(x, y) = 0$ .

3. Tangentenneigungen und Längenelement der unverformten Mittellinie

$$\begin{aligned} y' &= f(x) = -F_x/F_y \\ \varphi &= \arctg f(x) \\ \varphi_v &= \arctg f(x_v) \rightarrow x_v \\ \Delta s_{v+1,v} &= \int_{x_v}^{x_{v+1}} \sqrt{1 + y'^2} dx; \end{aligned}$$

4. Berechnung der in (30) auftretenden, bei konstantem  $\Delta\varphi$  unveränderlichen Koeffizienten

$$1 - \frac{(\Delta\varphi_n)^2}{4}, \quad 1 - \frac{(\Delta\varphi_n)^2}{6} \text{ usw.};$$

5. Annahme der in  $\bar{0}$  ( $\xi = 0, \eta = 0$ ) wirkenden Schnittgrößen  $M_0, N_0, Q_0$ ; gegebenenfalls Berechnung nach der linearen Theorie.

6. Einführung dieser Werte in Gl. (30)  $\rightarrow \vartheta_{0,1} \rightarrow \Delta\psi_{0,1} \rightarrow \psi_1$ ;

7. Koordinatendifferenzen und Koordinaten  $\Delta\xi_{0,1} \rightarrow \xi_1, \Delta\eta_{0,1} \rightarrow \eta_1$  (Gln. 22);

8. Schnittgrößen  $M_1, N_1, Q_1$ , Gl. (12a, 12b, 12c). Wiederholung der Einzelschritte 6., 7., 8. für die Intervalle  $1 \leftrightarrow 2, 2 \leftrightarrow 3$  usw. bis  $n-1 \leftrightarrow n$  oder  $\sum \Delta\varphi_{v+1,v} = 2\pi$ ;

9. Einführung der Endwerte in die Randbedingungen (35), (36), (37)  $\rightarrow \Delta\psi_n, \Delta\xi_n, \Delta\eta_n$ ;

10. Wiederholung der Einzelschritte 5. bis 9. mit geänderten Werten  $M_0^{(*)} \neq M_0$  unter Beibehaltung von  $N_0$  und  $Q_0$  bis zur Erfüllung der Randbedingung (35)  $\rightarrow \sum \Delta\psi_{v+1,v} = 2\pi$  ( $\sum \vartheta_{v+1,v} = 0$ );

11. Annahme oder approximative Berechnung eines neuen Wertetripels  $M_{0(1)}, N_{0(1)}, Q_{0(1)}$  unter Zugrundelegung des verformten Systems;

12. Wiederholung der Schritte 6. bis 11. bis zur Erfüllung aller Randbedingungen.

Das hier beschriebene Schema läßt sich in verschiedener Weise modifizieren, indem etwa nach jeweiligem Erreichen der Endwerte unter Verzicht auf die vorläufige Erfüllung der Randbedingung (35) sofort die Verbesserungen  $\Delta M_{0(x)}, \Delta N_{0(x)}, \Delta Q_{0(x)}$  nach der linearisierten Theorie berechnet werden. Weitere Modifikationen können sich bei Verwendung von Rechenautomaten aus den besonderen Erfordernissen der Programmierung ergeben.

## VII. Berücksichtigung der Längenänderungen

Die Berücksichtigung der bisher vernachlässigten Längenänderungen bringt keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Werden in (6) die Differentiale wieder durch endliche Differenzen ersetzt, so folgt



$$\vartheta_{\nu+1,\nu} = \Delta \psi_{\nu+1,\nu} - \Delta \varphi_{\nu+1,\nu} = \frac{1}{E^*} \left( \frac{M}{J} \right)_m (1 + \varepsilon) \Delta s_{\nu+1,\nu} + \varepsilon_{\varphi \nu+1,\nu} \Delta \varphi_{\varepsilon+1,\nu}. \quad (43)$$

Der durch (2) gegebene Wert der Verzerrung  $\varepsilon_\varphi$  wird wieder durch seinen Mittelwert im Intervall  $\Delta s_{\nu+1,\nu}$  dargestellt:

$$\varepsilon_{\varphi \nu+1,\nu} = \frac{1}{E^*} \left( \frac{N}{F} \right)_m; \quad (44)$$

für einen linearen Verlauf der Funktion  $\frac{N}{F}$  innerhalb des Intervalles gilt analog zu (15)

$$\varepsilon_{\varphi \nu+1,\nu} = \frac{1}{2 E^*} \left[ N_\nu \left( \frac{1}{F_\nu} + \frac{1}{F_{\nu+1}} \right) + \frac{\Delta N_{\nu+1,\nu}}{F_{\nu+1}} \right], \quad (45)$$

mit

$$\Delta N_{\nu+1,\nu} = -Q_\nu \sin \Delta \psi_{\nu+1,\nu} - \left( N_\nu - p \frac{\overline{\Delta s_{\nu+1,\nu}}}{\Delta \psi_{\nu+1,\nu}} \right) (1 - \cos \Delta \psi_{\nu+1,\nu}). \quad (46)$$

Schreiben wir nun für (30) abkürzend

$$\vartheta_{\nu+1,\nu} = \frac{A(\Delta s_{\nu+1,\nu})}{B(\Delta s_{\nu+1,\nu})}, \quad (47)$$

wobei  $A(\Delta s_{\nu+1,\nu})$  und  $B(\Delta s_{\nu+1,\nu})$  Zähler und Nenner des Bruches (30) darstellen, dann gilt mit

$$\overline{\Delta s} = (1 + \varepsilon_{\varphi \nu+1,\nu}) \Delta s_{\nu+1,\nu} \quad (48)$$

bei Berücksichtigung der Längenänderungen

$$\vartheta_{\nu+1,\nu} = \frac{A(\overline{\Delta s_{\nu+1,\nu}}) + \varepsilon_{\varphi \nu+1,\nu} \Delta \varphi_{\nu+1,\nu}}{B(\Delta s_{\nu+1,\nu})} \quad (49)$$

Zur Erfassung der Wirkung der Längenänderungen ist demnach in (30) die durch (48) bestimmte Länge des gedehnten Längenelementes einzuführen; das im Zähler hinzutretende Glied  $\varepsilon_{\varphi \nu+1,\nu} \cdot \Delta \varphi_{\nu+1,\nu}$  gibt den durch die Verschiedenheit der Faserlängen der gekrümmten Mantelfläche bedingten unmittelbaren Einfluß der Längenänderungen auf die Verdrehungen wieder. Man könnte nun (48) unter Beachtung von (45) und (46) in (49) einführen und würde so für die Winkeländerung  $\vartheta_{\nu+1,\nu}$  bei Vernachlässigung höherer Potenzen wieder eine lineare Gleichung entsprechend (30) erhalten. Für ganz schwach von der Kreisform abweichende Systeme käme dieser Weg in Betracht; im allgemeinen genügt es jedoch, bei dem geringen Einfluß der Längenänderungen, der Berechnung von  $\varepsilon_{\varphi \nu+1,\nu}$  die aus (30) ermittelten ersten Näherungswerte  $\vartheta_{\nu+1,\nu}^{(0)}$  zugrunde zu legen, also in (46) zunächst

$$\Delta \psi_{\nu+1,\nu} = \Delta \varphi_{\nu+1,\nu} + \vartheta_{\nu+1,\nu}^{(0)}$$

zu setzen und damit verbesserte Werte  $\vartheta_{\nu+1,\nu}^{(1)}$  aus (49) zu bestimmen und diesen Rechnungsgang gegebenenfalls — nun mit  $\Delta \psi_{\nu+1,\nu} = \Delta \varphi_{\nu+1,\nu} + \vartheta_{\nu+1,\nu}^{(1)}$  — zu wiederholen. Für eine kreisförmige Ausgangslage der Mittellinie verschwinden die Momente zufolge der hydrostatischen Belastung  $p$ , andererseits folgt aus der Randbedingung für die Verdrehungen, die wegen der Rotationssymmetrie am Bogenelement erfüllt sein muß:

$$d\psi - d\varphi = \frac{M}{E^* J} (1 + \varepsilon_\varphi) ds + \varepsilon_\varphi d\varphi = 0. \quad (50)$$

Die durch das zweite Glied dargestellte Verdrehung zufolge der linear mit dem Abstand vom Krümmungsmittelpunkt veränderlichen Faserlängen wird nun bekanntlich durch ein konstantes Moment kompensiert, dessen Größe sich aus (50) mit  $\varepsilon_\varphi = \frac{p \varrho}{E F}$  bei der klein gegenüber  $r$  bzw.  $\varrho$  vorausgesetzten Wandstärke  $d$  hinreichend genau zu

$$M_0 = -p \frac{J}{F} = -p \frac{d^3}{12} \quad (51)$$

ergibt, wie durch Einsetzen von (51) in (3) unter Beachtung von  $\varrho = (1 + \varepsilon_\varphi) r$  leicht verifiziert werden kann.

Wie eingangs festgestellt wurde, hat das unrunde Rohr das Bestreben, unter der Belastung eine dem Kreiszylinder ähnlichere Form anzunehmen. Aus (3) geht jedoch hervor, daß die Kreisform bei allgemeiner Ausgangsform unter endlich großen Drücken nicht erreicht werden kann: einer längs des Umfanges veränderlichen Winkeländerung würde ein verschwindendes Moment gegenüberstehen, und auch bei Berücksichtigung der Längenänderungen wäre (3), wie aus (50) zu ersehen ist, nicht erfüllt.

### VIII. Zahlenbeispiel

Zum Schluß seien noch die Ergebnisse eines numerischen Beispiels mitgeteilt. Auf ein elliptisches, in hochwertigem Stahl ( $\sigma_s = 4 \text{ t/cm}^2$ ) ausgeführtes Rohr mit den Halbachsen der Mittellinie  $a = 52,5 \text{ cm}$ ,  $b = 50,5 \text{ cm}$  und einer Wandstärke von  $d = 3 \text{ cm}$  wirke ein auf die Mittellinie bezogener Innendruck von 50 at. (Bezeichnungen siehe Abb. 6)

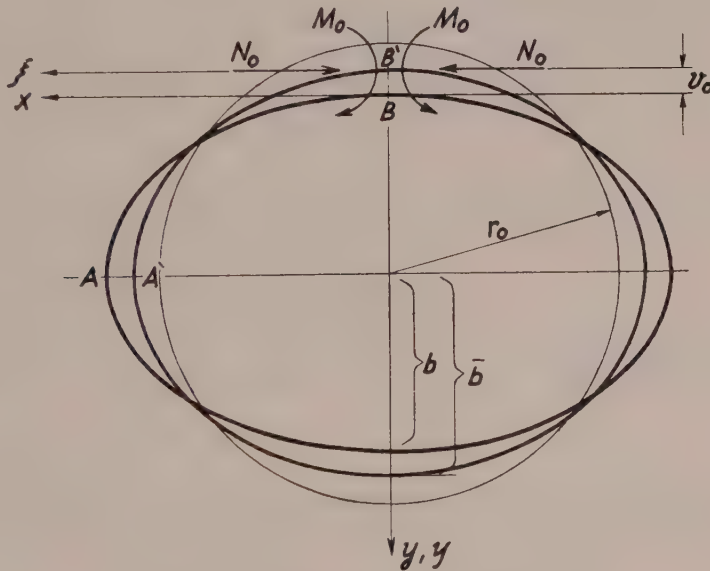


Abb. 6. Doppelt symmetrisches System

Aus der Theorie erster Ordnung ergeben sich für die Schnittgröße die Werte

$$\begin{aligned} M_0 &= M_B = + 2,51 \text{ tcm} \\ M_A &= - 2,65 \text{ tcm} \\ N_0 &= 2,525 \text{ t.} \end{aligned}$$

Das Näherungsverfahren liefert (bei Unterteilung des Quadranten in 10 Intervalle; ohne Berücksichtigung der Längenänderungen):

$$\begin{aligned} M_0 &= M_{B'} = + 1,710 \text{ tcm} \\ M_{A'} &= - 1,792 \text{ tcm} \\ v_0 &= 0,32 \text{ cm} \\ \bar{b} &= b + v_0 = 50,82 \text{ cm} \\ N_0 &= p \bar{b} = 2,541 \text{ t} \end{aligned}$$

Wie der Vergleich der Momente zeigt, betragen die nach dem üblichen Verfahren berechneten Werte rund das 1,5fache der auf das verformte System bezogenen Momente; bei Berücksichtigung der Längenänderung, würden sich die hier ausgewiesenen Momente nur wenig verringern.

(Eingegangen am 2. November 1960)

## Biegung mit Längskraft in Stahlbetonbalken bei Berücksichtigung des Kriechens

Von R. Trostel, Berlin

Mit 15 Textabbildungen

**Zusammenfassung.** Die Berücksichtigung der zeitabhängigen Betonverformungen bei der Untersuchung des Problems der außermittigen Biegung führt auf eine partielle Integro-Differentialgleichung. Diese läßt sich für die technisch wichtigsten Fälle durch gut konvergierende Reihen lösen. Beim symmetrisch bewehrten Querschnitt kommt man damit zu allgemeinen Ergebnissen, während bei unsymmetrischer Bewehrung Resultate nur mit konkreten Zahlenwerten erhalten werden können.

### I. Allgemeines

Bekanntlich ist bei der exakten Berechnung der Spannungen eines durch Biegemomente und Längskräfte belasteten Stabes die Verformungstheorie heranzuziehen, d. h., bei der Berechnung der Biegemomente zu berücksichtigen, daß auch die Axialkraft einen Momentenbeitrag leistet. Betrachtet man z. B. den in Abb. 1 skizzierten Stab, so ist für die Berechnung der Biegspannungen das Verformungsmoment



Abb. 1.

$$M_0^*(x) = \widehat{M}(x) - P w_0^*(x) \quad (*)$$

zu benutzen, wobei  $\widehat{M}(x)$  das Biegemoment am unverformten System bedeutet, während man die Durchsenkungen  $w_0^*$  aus der Differentialgleichung des Balkens

$$w_0^{*'''}(x) + \frac{P}{EJ} w_0^*(x) = \frac{\widehat{M}(x)}{EJ} \quad (**)$$

unter Beachtung der Randbedingungen  $w(0) = w(l) = 0$  zu ermitteln hat. Da auf Grund des Betonkriechens die Deformationen  $w$  im Laufe der Zeit stark anwachsen können, werden sich auch die endgültigen Verformungsmomente  $M^*(x, \varphi)$  gegenüber den Werten  $M_0^*(x) = M^*(x, 0)$  nach (\*) insbesondere bei größeren Axiallasten und entsprechenden Bewehrungsverhältnissen (kleines Trägheitsmoment der



Bewehrungsstähle) stark vergrößern. Auf diese Tatsache hat erstmals Dischinger<sup>1</sup> in einer 1937 erschienenen Arbeit hingewiesen. Allerdings blieben dabei die Bewehrungsverhältnisse unberücksichtigt. Erst die neuere Entwicklung auf dem Gebiete der Theorie des Verbundes<sup>2</sup> macht es möglich, nunmehr auch den erheblichen Einfluß der Bewehrung auf diesen Effekt zu erfassen.

Zur Behandlung der vorliegenden Aufgabe muß vorbereitend das Deformationsverhalten eines Balkenelementes unter dem Einfluß der einwirkenden Schnittlasten untersucht werden. Hier unterscheidet man bekanntlich zwei verschiedene Fälle je nachdem, ob die aus  $N(x)$  (positiv als Druckkraft) und  $M(x)$  bestehende Belastung innerhalb des gesamten Querschnittes vorwiegend Druckspannungen und nur geringe Zugspannungen hervorruft (womit eine Betrachtung als Verbundquerschnitt in Frage kommt), oder mit gerissener Zugzone zu rechnen ist (A § 27, 2d\*). Indem wir letzteren Fall in geeigneter Weise auf ersteren reduzieren, können wir schließlich in Abschnitt IV das vorliegende Problem in Form einer partiellen Integro-Differentialgleichung allgemein formulieren. In Abschnitt V werden dann technisch wichtige Spezialfälle u. a. auch numerisch untersucht. Einem Zahlenbeispiel folgt in der Zusammenfassung eine für die Dimensionierung symmetrisch bewehrter Querschnitte zu beachtende Empfehlung.

## II. Das Deformationsverhalten des ungerissenen Verbundquerschnitts

Wirkung zeitlich konstanter Schnittlasten  $N(x)$  und  $M(x)$

### 1. Deformationen und Lastverteilung zur Zeit $t = 0$

Die im ideellen Gesamtquerschnitts-Schwerpunkt  $\mathfrak{S}_i$  (Schwerpunkt der aus der Betonquerschnittsfläche  $F_b$  und der reduzierten Bewehrungsquerschnittsfläche  $F_{e,r} = n F_e$  bestehenden ideellen Gesamtquerschnittsfläche  $F_i = F_b + n \cdot F_e$ ,  $n = E_e/E_b$ ) angreifende Längskraft  $N(x)$  und das Moment  $M(x)$  (beide am ideellen Gesamtquerschnitt wirkend) verteilen sich auf den Betonteil  $[N_{b0}(x), M_{b0}(x)]$  und den Stahlteil  $[N_{e0}(x), M_{e0}(x)]$ . Diese Teilschnittlasten können aus den Gleichgewichtsbedingungen unter Heranziehung der auch für den Verbundquerschnitt gültigen Bernoullischen Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte berechnet werden. Es ergeben sich schließlich die Teilschnittlasten<sup>1 2</sup>

$$N_{b0}(x) = \frac{y_b F_b}{J_i} M(x) + \frac{F_b}{F_i} N(x) = \frac{S_i}{J_i} M + \frac{F_b}{F_i} N, \quad (1a)$$

$$N_{e0}(x) = -\frac{n y_e F_e}{J_i} M(x) + \frac{n F_e}{F_i} N(x) = -\frac{S_i}{J_i} M + \frac{n F_e}{F_i} N, \quad (1b)$$

$$M_{b0}(x) = \frac{J_b}{J_i} M(x), \quad M_{e0}(x) = \frac{n J_e}{J_i} M(x) \quad (1c, d)$$

sowie für die Krümmung und Dehnung der ideellen Schwerachse

$$\kappa_0(x) = \frac{M(x)}{E_b J_i}, \quad \varepsilon_0(x) = \frac{N(x)}{E_b F_i}, \quad (2a, b)$$

\* Bestimmungen des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton.

<sup>1</sup> Fr. Dischinger: Untersuchungen über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken, Sonderdruck aus „Der Bauingenieur“, 18. Jhg., 1937.

<sup>2</sup> K. Sattler: Theorie der Verbundkonstruktionen, Bd. 1, Berlin: Wilhelm Ernst & Sohn, 1959.

<sup>1 2</sup> Ausführlicher hierüber bei K. Sattler, Theorie der Verbundkonstruktionen, Teil I, 2. Aufl., Ernst & Sohn, Berlin 1959.



wobei  $F_i$  und (mit den Eigentragheitsmomenten  $\bar{J}_b$  und  $\bar{J}_e$  von Beton- bzw. Stahlteil)

$$J_i = \bar{J}_b + y_b^2 F_b + n (\bar{J}_e + y_e^2 F_e) = J_b + n J_e \quad (3)$$

Querschnittsfläche bzw. auf die ideelle Schwerachse bezogenes Trägheitsmoment des Verbundquerschnittes bedeuten.  $S_i = y_b F_b = y_e F_{e,r} = y_e n F_e$  ist das statische Moment und  $J_b$  bzw.  $n J_e$  sind die Trägheitsmomente des Betonquerschnitts bzw. des reduzierten Stahlquerschnitts hinsichtlich der ideellen Schwerachse  $\bar{S}_i$  (Abb. 2).

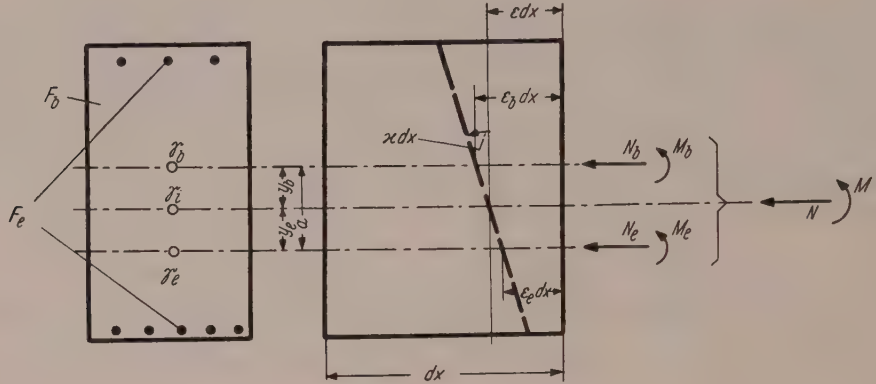


Abb. 2.

## 2. Zeitabhängige Deformationen und Lastverteilungen

Infolge der zeitabhängigen Betondeformationen verschiebt sich die durch (1a, d) charakterisierte Lastverteilung in dem Sinne, daß eine teilweise Entlastung des Betonquerschnittes stattfindet. Diese Lastumlagerungen vom Betonquerschnitt auf den Stahlquerschnitt, die auch zusätzliche zeitabhängige Krümmungen und Dehnungen des Gesamtquerschnittes zur Folge haben, werden aus der Forderung nach Gültigkeit der Gleichgewichtsbedingungen und der Bernoullischen Hypothese für den Gesamtquerschnitt in jedem Zeitaugenblick berechnet. Nach einiger Rechnung läßt sich das Problem letztlich unter der Voraussetzung konstanten Beton-Elastizitätsmoduls auf ein System zweier linearer gekoppelter Differentialgleichungen z. B. für die zeitabhängige Gesamtkrümmung und die Dehnung des Verbundquerschnittes reduzieren. Für die hier interessierende Lösung für die Balkenkrümmung  $\kappa(x, \varphi)$  erhält man schließlich, nachdem man die erwähnten Differentialgleichungen für die Anfangsbedingungen  $\kappa(x, 0) = \kappa_0(x)$ ,  $\varepsilon(x, 0) = \varepsilon_0(x)$  gelöst hat<sup>2</sup>

$$\kappa(x, \varphi) = \frac{M(x)}{E_b J_i} [1 + f_M(x, \varphi)] + \frac{N(x)}{E_b F_i} f_N(x, \varphi) + \frac{\varepsilon_0}{\varphi_n} f_N(x, \varphi), \quad (4a)$$

wobei  $f_M(x, \varphi)$  bzw.  $f_N(x, \varphi)$  Abkürzungen für die Funktionen

$$f_M(x, \varphi) = \frac{J_i}{n J_e} \left[ 1 - \frac{n \bar{J}_e}{J_i} + \left( 1 + \frac{F_i}{n F_e} \kappa_1 \right) \frac{\kappa_2 + \alpha_e}{\kappa_1 - \kappa_2} e^{\kappa_1 \varphi} - \left( 1 + \frac{F_i}{n F_e} \kappa_2 \right) \frac{\kappa_1 + \alpha_e}{\kappa_1 - \kappa_2} e^{\kappa_2 \varphi} \right],$$

$$f_M(x, 0) = 0, \quad (4b)$$

$$f_N(x, \varphi) = \frac{a F_b}{n J_e} \left[ 1 + \frac{\kappa_2 + \alpha_e}{\kappa_1 - \kappa_2} e^{\kappa_1 \varphi} - \frac{\kappa_1 + \alpha_e}{\kappa_1 - \kappa_2} e^{\kappa_2 \varphi} \right], \quad f_N(x, 0) = 0 \quad (4c)$$

darstellen. Es sind  $a = y_e + y_b$  der Abstand der Teilquerschnitts-Schwerpunkte (Abb. 2),  $\varepsilon_s$  des Endschwindmaß und  $\varphi_n$  der Endwert der Kriechzahl  $\varphi(t)$ . Mit

$$\alpha_e = \frac{n F_e}{F_i} \frac{n \bar{J}_e}{J_i} \quad \text{und} \quad \alpha_b = \frac{F_b \bar{J}_b}{F_i J_i} \quad (4d, e)$$

sind die Werte  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  (als Wurzeln einer charakteristischen quadratischen Gleichung)

$$\kappa_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ -(1 + \alpha_e - \alpha_b) \pm \sqrt{(1 + \alpha_e - \alpha_b)^2 - 4 \alpha_e} \right] \quad (4f)$$

Wirkung zeitlich veränderlicher Schnittlasten  $N(x, \varphi)$  und  $M(x, \varphi)$

Die Lösung für diesen Fall kann unmittelbar aus der Lösung (4a) für konstante Schnittlasten aufgebaut werden, indem man sich die Schnittlasten  $N(x, \varphi)$  bzw.  $M(x, \varphi)$  durch ihre Anfangswerte  $N(x, 0)$  bzw.  $M(x, 0)$  und die Summe aller Elementaranteile  $\frac{\partial N}{\partial \chi} d\chi$  bzw.  $\frac{\partial M}{\partial \chi} d\chi$  gemäß

$$M(x, \varphi) = M(x, 0) + \int_{\chi=0}^{\varphi} \frac{\partial M}{\partial \chi} d\chi, \quad N(x, \varphi) = N(x, 0) + \int_{\chi=0}^{\varphi} \frac{\partial N}{\partial \chi} d\chi \quad (5)$$

ausgedrückt denkt (Abb. 3). Beachtet man nun, daß die zur Zeit  $\tau$  (zugehöriger Kriechwert  $\chi(\tau)$ ) entstehenden Schnittlastzuwächse bis zur Zeit  $t$  (zugehöriger Kriechwert  $\varphi(t)$ ) nur die „Wirkungsdauer“  $\varphi - \chi$  haben, so erhält man nach Summation über alle Elementarzuwächse zuzüglich der Anfangswerte für die zur Zeit  $t$  sich ergebende Krümmung  $\kappa(x, \varphi)$  infolge der zeitlich veränderlichen Schnittlasten im Sinne von (4a)

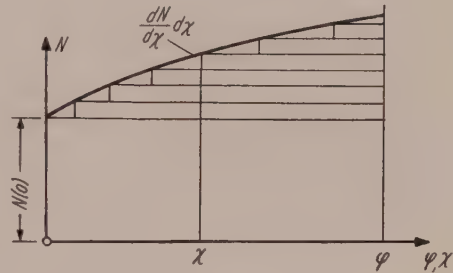


Abb. 3.

$$\begin{aligned} \kappa(x, \varphi) = & \frac{M(x, 0)}{E_b J_i} [1 + f_M(x, \varphi)] + \frac{1}{E_b J_i} \int_{\chi=0}^{\varphi} \frac{\partial M}{\partial \chi} [1 + f_M(x, \varphi - \chi)] d\chi \\ & + \frac{N(x, 0)}{E_b F_i} f_N(x, \varphi) + \frac{1}{E_b F_i} \int_{\chi=0}^{\varphi} \frac{\partial N}{\partial \chi} f_N(x, \varphi - \chi) d\chi + \frac{\varepsilon_s}{\varphi_n} f_N(x, \varphi). \end{aligned} \quad (6a)$$

Partielle Integration liefert bei Beachtung von  $f_M(x, 0) = f_N(x, 0) = 0$

$$\begin{aligned} \kappa(x, \varphi) = & \frac{1}{E_b J_i} \left[ M(x, \varphi) - \int_{\chi=0}^{\varphi} M(x, \chi) \frac{\partial f_M(x, \varphi - \chi)}{\partial \chi} d\chi \right] - \\ & - \frac{1}{E_b F_i} \int_{\chi=0}^{\varphi} N(x, \chi) \frac{\partial f_N(x, \varphi - \chi)}{\partial \chi} d\chi + \frac{\varepsilon_s}{\varphi_n} f_N(x, \varphi). \end{aligned} \quad (6b)$$

Nun ist z. B.

$$f_N(x, \varphi - \chi) = \frac{a F_b}{n \bar{J}_e} \left[ 1 + \frac{\kappa_2 + \alpha_e}{\kappa_1 - \kappa_2} e^{\kappa_1(\varphi - \chi)} - \frac{\kappa_1 + \alpha_e}{\kappa_1 - \kappa_2} e^{\kappa_2(\varphi - \chi)} \right],$$

also mit

$$\beta_{1N} = \kappa_1 \frac{a F_b}{n \bar{J}_e} \frac{\kappa_2 + \alpha_e}{\kappa_1 - \kappa_2}, \quad \beta_{2N} = \kappa_2 \frac{a F_b}{n \bar{J}_e} \frac{\kappa_1 + \alpha_e}{\kappa_1 - \kappa_2} \quad (6c, d)$$

schließlich

$$\frac{\partial f_N(x, \varphi - \chi)}{\partial \chi} = -\beta_{1N} e^{\kappa_1 \varphi} e^{-\kappa_1 \chi} + \beta_{2N} e^{\kappa_2 \varphi} e^{-\kappa_2 \chi} \quad (6e)$$

und entsprechend mit den Abkürzungen

$$\beta_{1M} = -\frac{\kappa_1 J_i}{n \bar{J}_e} \left( 1 + \frac{F_i \kappa_1}{n F_e} \right) \frac{\kappa_2 + \alpha_e}{\kappa_1 - \kappa_2}, \quad \beta_{2M} = -\frac{\kappa_2 J_i}{n \bar{J}_e} \left( 1 + \frac{F_i \kappa_2}{n F_e} \right) \frac{\kappa_1 + \alpha_e}{\kappa_1 - \kappa_2} \quad (6f, g)$$

letztlich

$$\frac{\partial f_M(x, \varphi - \chi)}{\partial \chi} = -\beta_{1M} e^{\kappa_1 \varphi} e^{-\kappa_1 \chi} + \beta_{2M} e^{\kappa_2 \varphi} e^{-\kappa_2 \chi}. \quad (6h)$$

Wir gewinnen damit aus (6b) endgültig

$$\begin{aligned} \kappa(x, \varphi) = & \frac{1}{E_b J_i} \left[ M(x, \varphi) + \beta_{1M} e^{\kappa_1 \varphi} \int_{\chi=0}^{\varphi} M e^{-\kappa_1 \chi} d\chi - \beta_{2M} e^{\kappa_2 \varphi} \int_{\chi=0}^{\varphi} M e^{-\kappa_2 \chi} d\chi \right] \\ & + \frac{1}{E_b F_i} \left[ \beta_{1N} e^{\kappa_1 \varphi} \int_{\chi=0}^{\varphi} N e^{-\kappa_1 \chi} d\chi - \beta_{2N} e^{\kappa_2 \varphi} \int_{\chi=0}^{\varphi} N e^{-\kappa_2 \chi} d\chi \right] + \frac{\varepsilon_s}{\varphi_n} f_N(x, \varphi) \end{aligned} \quad (6i)$$

worin die Größen  $\kappa_1, \kappa_2$  und  $\beta$ , ebenso wie  $F_i$  und  $J_i$  (schon auf Grund der überall nicht gleichen Bewehrung) im allgemeinen Falle von der Balkenachsenordinate  $x$  abhängig sind.

### Spezialfälle

#### a) Querschnitt mit symmetrischer Bewehrung

Wegen  $y_e = y_b = 0$  (Teilschwerpunkte fallen mit dem ideellen Gesamtschwerpunkt zusammen) ist auch  $a = 0$  und damit  $f_N = 0$ . Außerdem wird  $J_i = \bar{J}_b + n \bar{J}_e$  und damit hat man

$$1 + \alpha_e - \alpha_b = 1 + \frac{n F_e}{F_i} \frac{n \bar{J}_e}{J_i} - \frac{F_b \bar{J}_b}{F_i J_i} = \frac{n F_e}{F_i} + \frac{n \bar{J}_e}{J_i}$$

und

$$(1 + \alpha_e - \alpha_b)^2 - 4 \alpha_e = \left( \frac{n F_e}{F_i} - \frac{n \bar{J}_e}{J_i} \right)^2,$$

also

$$\kappa_1 = -\frac{n \bar{J}_e}{J_i}, \quad \kappa_2 = -\frac{n F_e}{F_i}, \quad (7a, b)$$

so daß schließlich

$$f_M(x, \varphi) = \frac{\bar{J}_b}{n \bar{J}_e} \left( 1 - e^{-\frac{n \bar{J}_e}{J_i} \varphi} \right) \quad (7c)$$

folgt. In diesem Falle sind demnach

$$\beta_{1N} = \beta_{2N} = \beta_{2M} = 0, \quad \beta_{1M} = \frac{\bar{J}_b}{J_i}. \quad (7d)$$

## b) Querschnitt ohne Eigenträgheitsmoment der Bewehrung

Liegen die Bewehrungsseisen alle in einer Lage, so ist, wenn wir vom Eigenträgheitsmoment der Rundstäbe selbst absehen,  $\bar{J}_e = 0$ . Damit wird  $\alpha_e = 0$  und  $\kappa_1 = 0$  sowie

$$\kappa_2 = -(1 - \alpha_b) = -\left(1 - \frac{F_b \bar{J}_b}{F_i J_i}\right) = -\frac{n F_e J_{b,e}}{F_i J_i} = \kappa_{20}, J_{b,e} = \bar{J}_b + a^2 F_b. \quad (8a)$$

Setzen wir in (4b) bzw. (4c)  $\kappa_1 = \alpha_e = \bar{J}_e = 0$ , so erscheinen die Resultate 0/0, womit die Anwendung der L'Hospitalischen Regel erforderlich wird. Wir betrachten zunächst (4c), wofür man auch

$$f_N = \frac{n F_e a F_b}{F_i J_i} \frac{1}{\alpha_e} \left[ 1 + \frac{\kappa_2 + \alpha_e}{\kappa_1 - \kappa_2} e^{\kappa_1 \varphi} - \frac{\kappa_1 + \alpha_e}{\kappa_1 - \kappa_2} e^{\kappa_2 \varphi} \right]$$

schreiben kann. Man hat dann also

$$\begin{aligned} f_N = \frac{n F_e a F_b}{F_i J_i} \lim_{\alpha_e \rightarrow 0} & \left\{ \frac{(\kappa_1 - \kappa_2) \left( \frac{d\kappa_2}{d\alpha_e} + 1 \right) - (\kappa_1 + \alpha_e) \frac{d}{d\alpha_e} (\kappa_1 - \kappa_2)}{(\kappa_1 - \kappa_2)^2} e^{\kappa_1 \varphi} + \right. \\ & + \frac{\kappa_2 + \alpha_e}{\kappa_1 - \kappa_2} \varphi \frac{d\kappa_1}{d\alpha_e} e^{\kappa_1 \varphi} - \frac{(\kappa_1 - \kappa_2) \left( \frac{d\kappa_1}{d\alpha_e} + 1 \right) - (\kappa_1 + \alpha_e) \frac{d}{d\alpha_e} (\kappa_1 - \kappa_2)}{(\kappa_1 - \kappa_2)^2} e^{\kappa_2 \varphi} - \\ & \left. - \frac{\kappa_1 + \alpha_e}{\kappa_1 - \kappa_2} \varphi \frac{d\kappa_2}{d\alpha_e} e^{\kappa_2 \varphi} \right\}. \end{aligned}$$

Es folgt schließlich mit

$$\begin{aligned} \kappa_1 \Big|_{\alpha_e=0} &= 0, \quad \kappa_2 \Big|_{\alpha_e=0} = \kappa_{20}, \quad (\kappa_1 - \kappa_2) \Big|_{\alpha_e=0} = -\kappa_2 \Big|_{\alpha_e=0} = -\kappa_{20}, \quad \frac{d\kappa_1}{d\alpha_e} \Big|_{\alpha_e=0} = \\ &= -\frac{1}{1 - \alpha_b} = \frac{1}{\kappa_{20}}, \quad \frac{d\kappa_2}{d\alpha_e} \Big|_{\alpha_e=0} = \frac{\alpha_b}{1 - \alpha_b} = -1 + \frac{1}{1 - \alpha_b} = -1 + \frac{1}{\kappa_{20}}, \\ &\quad \frac{d}{d\alpha_e} (\kappa_1 - \kappa_2) \Big|_{\alpha_e=0} = 1 + \frac{2}{\kappa_{20}} \end{aligned}$$

das Resultat

$$f_N(x, \varphi) = -\frac{n F_e a F_b}{F_i J_i \kappa_{20}^2} [\kappa_{20} \varphi + (1 + \kappa_{20}) (1 - e^{\kappa_{20} \varphi})]. \quad (8b)$$

In entsprechender Weise erhält man

$$f_M(x, \varphi) = -\frac{n F_e}{F_i \kappa_{20}^2} \left[ \kappa_{20} \varphi + (1 + \kappa_{20}) \left( 1 + \frac{F_i \kappa_{20}}{n F_e} \right) (1 - e^{\kappa_{20} \varphi}) \right], \quad (8c)$$

und damit werden

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_N(x, \varphi - \chi)}{\partial \chi} &= -\beta_{1N0} + \beta_{2N0} e^{\kappa_{20} \varphi} e^{-\kappa_{20} \chi}, \\ \frac{\partial f_M(x, \varphi - \chi)}{\partial \chi} &= -\beta_{1M0} + \beta_{2M0} e^{\kappa_{20} \varphi} e^{-\kappa_{20} \chi}, \end{aligned} \right\} \quad (8d, e)$$



mit

$$\left. \begin{aligned} \beta_{1N_0} &= \frac{a F_b}{J_{b,e}}, \beta_{2N_0} = \frac{a F_b}{J_{b,e}} \left( 1 - \frac{n F_e}{F_i} \frac{J_{b,e}}{J_i} \right), \\ \beta_{1M_0} &= \frac{J_i}{J_{b,e}}, \beta_{2M_0} = \frac{J_i}{J_{b,e}} \left( 1 - \frac{J_{b,e}}{J_i} \right) \left( 1 - \frac{n F_e}{F_i} \frac{J_{b,e}}{J_i} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (8f)$$

### c. Betonquerschnitt ohne Bewehrung

Gehen wir von den Formeln (7) für den symmetrisch bewehrten Querschnitt aus, so hat man  $f_N = 0$  und mit  $F_e = \overline{J_e} = 0$ , also  $J_i = \overline{J_b}$ ,

$$\beta_{1M} = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = \beta_{1N} = \beta_{2N} = \beta_{2M} = 0.$$

In diesem Falle nimmt die Gleichung (6i) die einfache Form

$$\kappa(x, \varphi) = \frac{1}{E_b J_i} \left[ M(x, \varphi) + \int_{x=0}^{\varphi} M d\chi \right] = \frac{e^{-\varphi}}{E_b J_i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ e^{\varphi} \int_0^{\varphi} M(x, \chi) d\chi \right] \quad (9)$$

an. Dasselbe Resultat läßt sich auch aus den Formeln (8) folgern.

## III. Das Deformationsverhalten eines gerissenen Querschnitts

Zunächst die Verhältnisse zur Zeit  $t = 0$  betrachtend, haben wir es, da wir auch für den gerissenen Querschnitt die Gültigkeit der Bernoullischen Hypothese voraussetzen, mit einem Verbundquerschnitt, bestehend aus der verbliebenen Betondruckfläche  $F_b'$  und der Stahlquerschnittsfläche  $F_e$  zu tun (Abb. 4). Mit denselben

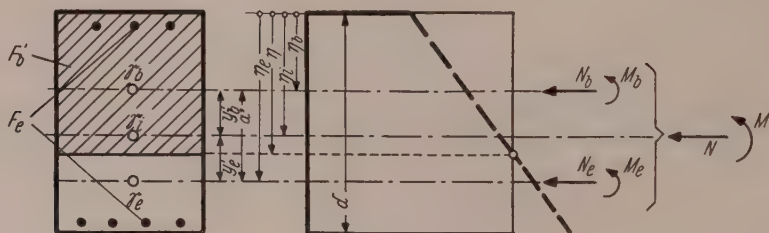


Abb. 4.

Gleichungen wie unter II 1 erhalten wir dann für die Teilschnittlasten und die Verzerrungen wieder die Relationen (1) und (2), worin lediglich  $F_b, F_i, S_i$  und  $J_i$  durch  $F_b', F_i', S_i'$  und  $J_i'$  zu ersetzen sind, die nunmehr unter Berücksichtigung des verkleinerten Betonquerschnittes berechnet werden müssen und im übrigen dieselbe Bedeutung wie unter II. 1 haben.  $M$  und  $N$  (letztere in der gemeinsamen Schwerachse  $\zeta_i'$  angreifend) sind wieder die resultierenden Schnittlasten. Die Lage der Spannungs-Nulllinie und damit die Größe von  $\eta$ , die ja die Größe des Betonquerschnittes  $F_b'$  bestimmt, ermittelt man aus der Forderung nach Verschwinden der Betonspannungen in der Spannungs-Nulllinie:

$$\sigma_b = \frac{M}{J_i'} (\eta - \eta_i) - \frac{N}{F_i'} = 0. \quad (10a)$$

Nehmen wir z. B. an, daß die ursprünglich gegebene Belastung aus einer in der Mittellinie wirkenden Kraft  $\bar{N}$  und einem Moment  $\bar{M}$  besteht, so sind

$$N = \bar{N}, \quad M = \bar{M} - \bar{N} \left( \frac{d}{2} - \eta_i \right) = \bar{M} - N \left( \frac{d}{2} - \eta_i \right) \quad (10b)$$

und man gewinnt aus (10a) schließlich

$$\frac{\eta_i}{d} \left[ \frac{J_i'}{(\eta - \eta_i) \eta_i F_i'} - 1 \right] = \frac{\bar{M}}{N d} - \frac{1}{2}. \quad (10c)$$

Hierin sind  $\eta_i$ ,  $J_i'$  und  $F_i'$  von  $\eta$  abhängig, so daß hieraus  $\eta$  berechnet werden kann.

Bei Betrachtung der zeitabhängigen Vorgänge, insbesondere bei zeitlich veränderlichen Schnittlasten, erkennt man, daß auch die Lage der Spannungsnulllinie zeitabhängig wird, so daß jede Schnittlaständerung an einem anderen Verbundquerschnitt wirksam ist. Die der Formel (6i) entsprechende Relation ist in diesem Falle wesentlich komplizierter. Eine Lösung des Problems ist praktisch nur dadurch möglich, daß man die Lage der Nulllinie während der zeitabhängigen Vorgänge als konstant ansieht, womit wieder die Relation (6i) (unter Verwendung der Größen  $\kappa'$ ,  $\beta'$ ,  $F_i'$  und  $J_i'$ ) herangezogen werden kann.

#### IV. Die zeitabhängigen Balkenverformungen und Schnittlasten

##### A. Die Integro-Differentialgleichung des Problems

Wir betrachten den in  $A$  und  $B$  elastisch eingespannten Stab der Länge  $l$  der neben der Axialbelastung  $P$  unter einer Querbewegung  $q(x)$  stehe (Abb. 5)  $c^{(K)}$  und  $c^{(M)}$  seien

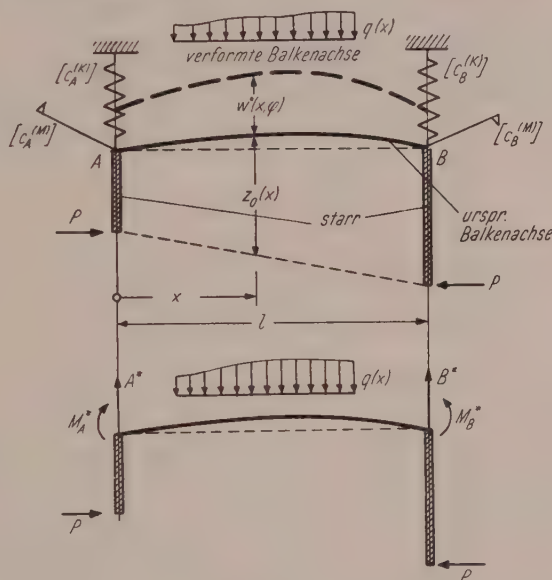


Abb. 5.

die Bettungsziffern der Stablager, die mit den Auflagerlasten durch die Beziehungen

$$A^* = -c_A^{(K)} w_A^*, \quad B^* = -c_B^{(K)} w_B^*, \quad M_A^* = c_A^{(M)} \frac{\partial w^*}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad M_B^* = -c_B^{(M)} \frac{\partial w^*}{\partial x} \Big|_{x=l} \quad (11)$$

verknüpft sind, wobei die Auflagerlasten selbst auf Grund der Gleichgewichtsbedingungen miteinander in der Form

$$\begin{aligned} M_A^* - M_B^* - P [w_B^* - w_A^* - (z_{0B} - z_{0A})] + A^* l - \overleftarrow{M}_{q(B)} &= 0 \\ M_A^* - M_B^* - P [w_B^* - w_A^* - (z_{0B} - z_{0A})] - B^* l + \overrightarrow{M}_{q(A)} &= 0 \end{aligned} \quad (12a)$$

zusammenhängen. Der Index \* deutet hierbei die endgültigen Last- bzw. Verformungsgrößen infolge Quer- und Axiallast zur „Zeit“  $\varphi$  an.  $\overrightarrow{M}_{q(A)}$  bzw.  $\overleftarrow{M}_{q(B)}$  sind die statischen Momente der Querbelastung hinsichtlich der (verschobenen) Auflagerpunkte<sup>1</sup>.

Die im Stabe entstehenden Biegemomente ergeben sich mit  $\xi = x/l$  zu

$$M^*(\xi, \varphi) = M_A^* + (M_B^* - M_A^*) \xi + P [w_A^* + (w_B^* - w_A^*) \xi - w^*(\xi, \varphi)] + \widehat{M}^{(0)}(\xi). \quad (12b)$$

Dabei ist

$$\widehat{M}^{(0)}(\xi) = M^{(0)}(\xi) - P z_0(\xi), \quad (12c)$$

wobei  $M^{(0)}(\xi)$  die Biegemomente des beidseitig gelenkig gelagerten Stabes unter der Last  $q$  und  $z_0$  die anfänglichen lotrechten Abstände der (schwach gekrümmten) Balkenschwerachse  $\mathfrak{S}_i$  von der Verbindungslinie der Axiallast-Angriffspunkte sind.

Die Längskraftbelastung ist

$$N(\xi, \varphi) \approx P = \text{const.} \quad (12d)$$

Einsetzen von (12b) und (12d) in (6i) liefert mit  $\kappa(\xi, \varphi) \approx \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} = \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2}$

( $w^*$  sind die lotrechten Verschiebungen der ideellen Balkenschwerachse  $\mathfrak{S}_i$ ) eine Integro-Differentialgleichung für die Verschiebungen.

Mit Einführung der neuen Variablen

$$\begin{aligned} W^*(\xi, \varphi) &= w^*(\xi, \varphi) - w_A^* - (w_B^* - w_A^*) \xi - \frac{M_A^*}{P} - \frac{M_B^* - M_A^*}{P} \xi, \\ \frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2}, \end{aligned} \quad (13a)$$

womit aus (12b) die einfache Relation

$$M^*(\xi, \varphi) = \widehat{M}^{(0)}(\xi) - P W^*(\xi, \varphi) \quad (13b)$$

hervorgeht, erhält man schließlich

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi^2} + \frac{P l^2}{E_b J_i} \left\{ W^* + \beta_{1M} e^{\kappa_1 \varphi} \int_0^\varphi W^* e^{-\kappa_1 \chi} d\chi - \beta_{2M} e^{\kappa_2 \varphi} \int_0^\varphi W^* e^{-\kappa_2 \chi} d\chi \right\} &= \\ = \left( \frac{P}{E_b F_i} + \frac{\varepsilon_s}{\varphi_N} \right) l^2 f_N(\xi, \varphi) + \frac{\widehat{M}^{(0)}(\xi) l^2}{E_b J_i} [1 + f_M(\xi, \varphi)] &= \psi(\xi, \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (13c)$$

Wir zerlegen nun die endgültigen Größen  $w^*(\xi, \varphi)$ ,  $W^*(\xi, \varphi)$ ,  $M^*(\xi, \varphi)$ ,  $A^*$  und  $B^*$  in zwei Anteile, wovon der erste die jeweiligen (zeitunabhängigen) Größen zur Zeit  $t = 0$ , die wir durch einen Index 0 kennzeichnen, darstellt, während der zweite durch einen Index 1 charakterisierte Anteil den Einfluß des Kriechens und Schwindens zum Ausdruck bringt.

<sup>1</sup> Vom Einfluß der Axialverschiebungen wird abgesehen.

$$\begin{aligned} w^*(\xi, \varphi) &= w_0^*(\xi) + w_1^*(\xi, \varphi), \quad W^*(\xi, \varphi) = W_0^*(\xi) + W_1^*(\xi, \varphi), \\ M^*(\xi, \varphi) &= M_0^*(\xi) + M_1^*(\xi, \varphi), \quad A^* = A_0^* + A_1^*(\varphi), \quad B^*(\varphi) = B_0^* + B_1^*(\varphi). \end{aligned} \quad (14a)$$

Hiermit folgt dann aus (13c)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W_1^*}{\partial \xi^2} + \frac{P l^2}{E_b J_i} \left\{ W_1^* + \beta_{1M} e^{\kappa_1 \varphi} \int_0^\varphi W_1^* e^{-\kappa_1 \chi} d\chi - \beta_{2M} e^{\kappa_2 \varphi} \int_0^\varphi W_1^* e^{-\kappa_2 \chi} d\chi \right\} = \\ = \left( \frac{P}{E_b F_i} + \frac{\varepsilon_s}{\varphi_n} \right) l^2 f_N(\xi, \varphi) + \frac{M_0^*(\xi) l^2}{E_b J_i} [1 + f_M(\xi, \varphi)] - \frac{d^2 W_0^*}{d\xi^2}, \end{aligned} \quad (14b)$$

wobei

$$\begin{aligned} M_0^*(\xi) &= \widehat{M}^{(0)}(\xi) + M_{A0}^* + (M_{B0}^* - M_{A0}^*) \xi - P [w_0^*(\xi) - w_{A0}^* - \\ &\quad - (w_{B0}^* - w_{A0}^*) \xi] = \widehat{M}^{(0)}(\xi) - P W_0^*(\xi) \end{aligned} \quad (14c)$$

das Biegemoment [Verformungsmoment] des (im allgemeinen statisch unbestimmt gelagerten) Stabes aus der Quer- und Axialbelastung zur Zeit  $t = 0$  ist, und es vereinfacht sich (14b) wegen

$$\frac{1}{l^2} \frac{d^2 W_0^*}{d\xi^2} = \frac{d^2 W_0^*}{dx^2} = \frac{M_0^*(\xi)}{E_b J_i}$$

schließlich zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W_1^*}{\partial \xi^2} + \frac{P l^2}{E_b J_i} \left\{ W_1^* + \beta_{1M} e^{\kappa_1 \varphi} \int_0^\varphi W_1^* e^{-\kappa_1 \chi} d\chi - \beta_{2M} e^{\kappa_2 \varphi} \int_0^\varphi W_1^* e^{-\kappa_2 \chi} d\chi \right\} = \\ = \left( \frac{P}{E_b F_i} + \frac{\varepsilon_s}{\varphi_n} \right) l^2 f_N(\xi, \varphi) + \frac{M_0^*(\xi) l^2}{E_b J_i} f_M(\xi, \varphi) = \psi_1(\xi, \varphi), \quad \psi_1(\xi, 0) = 0, \end{aligned} \quad (15a)$$

womit eine Integro-Differentialgleichung für die durch das Kriechen und Schwinden bedingten Zusatzverformungen gefunden ist. Durch fortlaufendes Differenzieren läßt sich aus (15a) die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - (\kappa_1 + \kappa_2) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \kappa_1 \kappa_2 \right] \frac{\partial^2 W_1^*}{\partial \xi^2} + \\ + \frac{P l^2}{E_b J_i} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + (\beta_{1M} - \beta_{2M} - \kappa_1 - \kappa_2) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_1 \beta_{2M} - \kappa_2 \beta_{1M} \right] W_1^* = \\ = e^{\kappa_2 \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ e^{(\kappa_1 - \kappa_2) \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} [e^{-\kappa_1 \varphi} \psi_1] \right\} = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \varphi^2} - (\kappa_1 + \kappa_2) \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} + \kappa_1 \kappa_2 \psi_1 \end{aligned} \quad (15b)$$

gewinnen, die man mit

$$\begin{aligned} \kappa_1 \kappa_2 = \alpha_e = \frac{n F_e}{F_i} \cdot \frac{n \bar{J}_e}{J_i}, \quad \kappa_1 + \kappa_2 = -(1 + \alpha_e - \alpha_b), \\ \beta_{1M} - \beta_{2M} - \kappa_1 - \kappa_2 = 1 + \frac{n F_e}{F_i}, \quad \kappa_1 \kappa_2 - \kappa_2 \beta_{1M} + \kappa_1 \beta_{2M} = \frac{n F_e}{F_i} \end{aligned} \quad (15c)$$

schließlich auf die einfache Form

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + (1 + \alpha_e - \alpha_b) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \alpha_e \right] \frac{\partial^2 W_1^*}{\partial \xi^2} + \frac{P l^2}{E_b J_i} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( 1 + \frac{n F_e}{F_i} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{n F_e}{F_i} \right] W_1^* = \\ = \frac{n F_e}{F_i} \frac{l^2}{E_b J_i} \left[ M_0^*(\xi) \left( 1 - \frac{n J_e}{J_i} \right) + \left( P + \frac{E_b F_i \varepsilon_s}{\varphi_n} \right) y_e \right] \end{aligned} \quad (15d)$$

bringen kann.



## B. Rand- und Anfangsbedingungen

Während die Durchbiegungen  $w^*$  bzw.  $W^*$  zu Beginn der plastischen Verformungen mit den elastischen Durchbiegungen  $w_0^*$  bzw.  $W_0^*$  zur Zeit  $t = 0$  ( $\varphi = 0$ ) identisch sein müssen, also für die durch das Kriechen und Schwinden bedingten Zusatzdeformationen die Anfangsbedingung  $w_1^*(\xi, 0) = 0$  bzw.

$$W_1^*(\xi, 0) = 0 \quad (16)$$

gelten muß, umfaßt die Randwertaufgabe die vier Bedingungen (11), in denen noch der aus den Gleichgewichtsbedingungen (12a) hervorgehende Zusammenhang zwischen den Auflagerlasten beachtet werden muß. Nach Anwendung der Zerlegung gemäß (14a) verbleiben für die durch das Kriechen und Schwinden bedingten Zusatzgrößen im Sinne von (11) die Randbedingungen

$$\begin{aligned} A_1^* &= -c_A^{(K)} w_{A1}^*, \quad B_1^* = -c_B^{(K)} w_{B1}^*, \quad M_{A1}^* = c_A^{(M)} \left. \frac{\partial w_1^*}{\partial x} \right|_{x=0}, \\ M_{B1}^* &= -c_B^{(M)} \left. \frac{\partial w_1^*}{\partial x} \right|_{x=l}. \end{aligned} \quad (17a)$$

Die Zusatz-Auflagerlasten müssen hierbei entsprechend (12a) die Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} M_{A1}^* - M_{B1}^* - P(w_{B1}^* - w_{A1}^*) + A_1^* l &= 0 \\ M_{A1}^* - M_{B1}^* - P(w_{B1}^* - w_{A1}^*) - B_1^* l &= 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} M_{A1}^* - M_{B1}^* - P(w_{B1}^* - w_{A1}^*) + A_1^* l &= 0 \\ M_{A1}^* - M_{B1}^* - P(w_{B1}^* - w_{A1}^*) - B_1^* l &= 0 \end{aligned}} \right\} \quad (17b)$$

befriedigen.

Mit Hilfe von (17b) und den beiden ersten Gleichungen von (17a) können wir zunächst die Auflagerverschiebungen  $w_{A1}^*$  und  $w_{B1}^*$  durch die Einspannmomente ausdrücken:

$$w_{A1}^* = -\frac{(M_{A1}^* - M_{B1}^*)/P}{1 + \frac{c_A^{(K)}}{c_B^{(K)}} - \frac{c_A^{(K)} l}{P}}, \quad w_{B1}^* = \frac{(M_{A1}^* - M_{B1}^*)/P}{1 + \frac{c_B^{(K)}}{c_A^{(K)}} - \frac{c_B^{(K)} l}{P}}. \quad (17c)$$

Beachten wir hierin noch (13b), wonach mit (14a)

$$\begin{aligned} M^*(\xi, \varphi) &= \widehat{M}^{(0)}(\xi) - P(W_0^*(\xi) + W_1^*(\xi, \varphi)) = (\widehat{M}^{(0)}(\xi) - P W_0^*(\xi)) - \\ &P W_1^*(\xi, \varphi) = M_0^*(\xi) + M_1^*(\xi, \varphi), \end{aligned}$$

also

$$M_1^*(\xi, \varphi) = -P W_1^*(\xi, \varphi) \quad (17d)$$

und speziell

$$M_{A1}^* = M_1^*(0, \varphi) = -P W_1^*(0, \varphi), \quad M_{B1}^* = M_1^*(l, \varphi) = -P W_1^*(l, \varphi) \quad (17e)$$

ist, so sind die Auflagerverschiebungen in der Form

$$w_{A1}^* = \frac{W_1^*(0, \varphi) - W_1^*(l, \varphi)}{1 + \frac{c_A^{(K)}}{c_B^{(K)}} - \frac{c_A^{(K)} l}{P}}, \quad w_{B1}^* = -\frac{W_1^*(0, \varphi) - W_1^*(l, \varphi)}{1 + \frac{c_B^{(K)}}{c_A^{(K)}} - \frac{c_B^{(K)} l}{P}} \quad (17f)$$

dargestellt,

Es verbleiben nun noch die beiden letzten Gleichungen von (17a), die wir in Form von Randbedingungen für die Größe  $W_1^*$  auszudrücken suchen. Hierbei beachten wir (13a) und erhalten

$$M_{A1}^* = \frac{c_A^{(M)}}{l} \left[ \frac{\partial W_1^*}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} + w_{B1}^* - w_{A1}^* + \frac{M_{B1}^* - M_{A1}^*}{P},$$

$$M_{B1}^* = -\frac{c_B^{(M)}}{l} \left[ \frac{\partial W_1^*}{\partial \xi} \right]_{\xi=1} + w_{B1}^* - w_{A1}^* + \frac{M_{B1}^* - M_{A1}^*}{P}.$$

Indem wir hierin die Größen  $w_{A1}^*$ ,  $w_{B1}^*$ ,  $M_{A1}^*$  und  $M_{B1}^*$  gemäß (17e) und (17f) durch die Funktionswerte von  $W_1^*$  ersetzen, erhalten wir schließlich die Randbedingungen

$$\left. \begin{aligned} & W_1^*(0, \varphi) \left[ 1 + \frac{c_A^{(M)}/Pl}{1 - \frac{P}{l} \left[ \frac{1}{c_A^{(K)}} + \frac{1}{c_B^{(K)}} \right]} \right] - \frac{c_A^{(M)}/Pl}{1 - \frac{P}{l} \left[ \frac{1}{c_A^{(K)}} + \frac{1}{c_B^{(K)}} \right]} W_1^*(1, \varphi) + \\ & + \frac{c_A^{(M)}}{Pl} \frac{\partial W_1^*}{\partial \xi} \bigg|_{\xi=0} = 0, \\ & - \frac{c_B^{(M)}/Pl}{1 - \frac{P}{l} \left[ \frac{1}{c_A^{(K)}} + \frac{1}{c_B^{(K)}} \right]} W_1^*(0, \varphi) + \left[ 1 + \frac{c_B^{(M)}/Pl}{1 - \frac{P}{l} \left[ \frac{1}{c_A^{(K)}} + \frac{1}{c_B^{(K)}} \right]} \right] \times \\ & \times W_1^*(1, \varphi) - \frac{c_B^{(M)}}{Pl} \frac{\partial W_1^*}{\partial \xi} \bigg|_{\xi=1} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Mit (15a), bzw. (15d), (16) und (18) ist das vorliegende Problem für die Unbekannte  $W_1^*$  nunmehr formuliert. Nach ihrer Bestimmung werden gemäß (17d) und (17f) die Biegemomente und Auflagerverschiebungen des Zusatzzustandes berechnet, und schließlich folgt aus (13a) der Zusatzverschiebungszustand  $w_1^*(\xi, \varphi)$ .

Speziell für Stäbe mit ideal-starrer bzw. schlaffer Lagerung (freies Ende, gelenkige Lagerung, Totaleinspannung) (Abb. 6a — d) sind die Randbedingungen besonders einfach, da die Koeffizienten der Gleichungen (18) unabhängig von  $P$  werden.

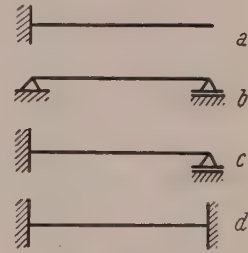


Abb. 6a — d

$$a) \quad c_A^{(M)} = c_A^{(K)} = \infty, \quad c_B^{(M)} = c_B^{(K)} = 0.$$

Aus (18) erhält man<sup>1</sup> die Randbedingungen

$$\frac{\partial W_1^*}{\partial \xi} \bigg|_{\xi=0} = 0, \quad W_1^*(1, \varphi) = 0, \quad (19a)$$

während aus (17e) und (17f)

$$M_{A1}^* = -P W_1^*(0, \varphi), \quad M_{B1}^* = 0, \quad w_{A1}^* = 0, \quad w_{B1}^* = -W_1^*(0, \varphi) = M_{A1}^*/P \quad (19b)$$

hervorgeht. Die Momente und Verschiebungen sind nach (17d) und (13a)

$$M_1^*(\xi, \varphi) = -P W_1^*(\xi, \varphi), \quad w_1^*(\xi, \varphi) = W_1^*(\xi, \varphi) - W_1^*(0, \varphi). \quad (19c)$$

$$b) \quad c_A^{(K)} = c_B^{(K)} = \infty, \quad c_A^{(M)} = c_B^{(M)} = 0.$$

Die Randbedingungen folgen aus (18) zu

$$W_1^*(0, \varphi) = 0, \quad W_1^*(1, \varphi) = 0, \quad (20a)$$

<sup>1</sup> Mit dem Faktor  $\alpha$  denken wir uns zunächst  $c_B^{(K)} = \alpha/c_A^{(M)}$  gesetzt. Dann ist für  $(c_A^{(M)}, c_A^{(K)}) \rightarrow \infty$   $c_B^{(K)} \rightarrow 0$  in der ersten Gleichung von (18) nur noch der Anteil  $[\partial W_1^*/\partial \xi]_{\xi=0}$  wesentlich.

und aus (17e) und (17f) hat man

$$M_{A1}^* = M_{B1}^* = w_{A1}^* = w_{B1}^* = 0. \quad (20b)$$

Momente und Verschiebungen sind nach (17d) und (13a)

$$w_1^*(\xi, \varphi) = W_1^*(\xi, \varphi), \quad M_1^*(\xi, \varphi) = -PW_1^*(\xi, \varphi) = -Pw_1^*(\xi, \varphi). \quad (20c)$$

$$c) \quad c_A^{(K)} = c_B^{(K)} = \infty, \quad c_A^{(M)} = \infty, \quad c_B^{(M)} = 0.$$

Aus (18) folgen als Randbedingungen

$$W_1^*(1, \varphi) = 0, \quad W_1^*(0, \varphi) + \left. \frac{\partial W_1^*}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad (21a)$$

und aus (17e) und (17f) gehen

$$M_{B1}^* = w_{A1}^* = w_{B1}^* = 0, \quad M_{A1}^* = -PW_1^*(0, \varphi) = P \left. \frac{\partial W_1^*}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} \quad (21b)$$

hervor. Momente und Verschiebungen sind nach (17d) und (13a)

$$M_1^*(\xi, \varphi) = -PW_1^*(\xi, \varphi), \quad w_1^*(\xi, \varphi) = W_1^*(\xi, \varphi) - (1 - \xi) W_1^*(0, \varphi). \quad (21c)$$

$$d) \quad c_A^{(K)} = c_B^{(K)} = \infty, \quad c_A^{(M)} = c_B^{(M)} = \infty.$$

Die Gleichungen (18) liefern als Randbedingungen

$$W_1^*(0, \varphi) - W_1^*(1, \varphi) + \left. \frac{\partial W_1^*}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad W_1^*(0, \varphi) - W_1^*(1, \varphi) + \left. \frac{\partial W_1^*}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad (22a)$$

und aus (17e) und (17f) erhält man

$$M_{A1}^* = -PW_1^*(0, \varphi), \quad M_{B1}^* = -PW_1^*(1, \varphi), \quad w_{A1}^* = w_{B1}^* = 0. \quad (22b)$$

Momente und Verschiebungen sind nach (17d) und (13a)

$$M_1^*(\xi, \varphi) = -PW_1^*(\xi, \varphi), \quad w_1^*(\xi, \varphi) = W_1^*(\xi, \varphi) - W_1^*(0, \varphi) - \xi \left[ \left. \frac{\partial W_1^*}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} \right]. \quad (22c)$$

Speziell bei hinsichtlich der Stabmitte symmetrischer Belastung und Steifigkeitsverteilung wird  $M_{A1}^* = M_{B1}^*$ , also  $W_1^*(0, \varphi) = W_1^*(1, \varphi)$ , so daß sich das Randwertproblem (22a) zu

$$\left. \frac{\partial W_1^*}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial W_1^*}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0, \quad (23a)$$

vereinfacht, während die übrigen Größen sich zu

$$w_{A1}^* = w_{B1}^* = 0, \quad M_1^*(\xi, \varphi) = -PW_1^*(\xi, \varphi), \quad w_1^*(\xi, \varphi) = W_1^*(\xi, \varphi) - W_1^*(0, \varphi) \quad (23b)$$

ergeben.

Wir gehen zur Betrachtung technisch wichtiger Beispiele über, die wir mit Hilfe von Produktansätzen zur Lösung bringen.

## V. Der Stab konstanter Steifigkeit mit ideal-starrer bzw. schlaffer Lagerung

### A. Allgemeine Lösung

In diesem Falle sind in (15a) sämtliche Beiwerte  $\beta$  und  $\kappa$  konstant, während  $f_N$  und  $f_M$  allein Funktionen von  $\varphi$  sind. Die Randwertprobleme (19a), (20a), (21a) und (23a) für die Stablagerungen der Abb. 6a — d lassen sich durch die allgemeinere Randwertaufgabe

$$\left. \begin{aligned} a_{11} W_1^*(0, \varphi) + a_{12} \frac{\partial W_1^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} &= 0, \\ a_{21} W_1^*(1, \varphi) + a_{22} \frac{\partial W_1^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

erfassen, wobei z. B. im Falle (a)  $a_{11} = a_{22} = 0$  und  $a_{12} = a_{21} = 1$  sind, usw.

Die formale Gleichheit des Randwertproblems mit demjenigen bei der Stabknickung und die einfache Form der Gleichung (15a) in diesem Falle gestattet die Lösung der Aufgabe durch Produktlösungen  $X(\xi) \Phi(\varphi)$ , wobei die ortsabhängigen Teile die Eigenfunktionen (Knicklinien des Stabes) darstellen. Betrachten wir vorbereitend kurz die reine Stabknickung, die durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 W}{d\xi^2} + \lambda^2 W = 0, \quad \lambda^2 = \frac{Pl^2}{E_b J_i} \quad (25)$$

und das Randwertproblem

$$\left. \begin{aligned} a_{11} W(0) + a_{12} \frac{dW}{d\xi} \Big|_{\xi=0} &= 0 \\ a_{21} W(1) + a_{22} \frac{dW}{d\xi} \Big|_{\xi=1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

beschrieben wird, so hat man, indem man die allgemeine Lösung von (25),

$$W = D \cos \lambda \xi + C \sin \lambda \xi, \quad (27a)$$

in (26) einführt, das für die Konstanten  $C$  und  $D$  lineare homogene Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} D a_{11} + C \lambda a_{12} &= 0, \\ D (a_{21} \cos \lambda - a_{22} \lambda \sin \lambda) + C (a_{21} \sin \lambda + a_{22} \lambda \cos \lambda) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (27b)$$

dessen Nennerdeterminante für das Entstehen von Null verschiedener Knickfiguren bekanntlich verschwinden muß. Hieraus folgt die Eigenwertgleichung

$$\operatorname{tg} \lambda = -\lambda \frac{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}{a_{11} a_{21} + a_{12} a_{22} \lambda^2}, \quad (27c)$$

sowie eine lineare Abhängigkeit der Konstanten  $C$  und  $D$  in der Form

$$D = -C \lambda \frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad (27d)$$

so daß aus (27a) die (nur noch eine willkürliche Konstante  $C$  enthaltende) Lösung

$$W = C \left[ \sin \lambda \xi - \lambda \frac{a_{12}}{a_{11}} \cos \lambda \xi \right] = C e(\lambda \xi) \quad (28a)$$



entsteht. Da durch (27c) eine unendliche Schar von Eigenwerten  $\lambda_k = \sqrt{P_k l^2 / E_b J_i}$  definiert ist, für die die Lösung (28a) das Randwertproblem (26) befriedigt, ist Gl. (28a) mit den willkürlichen Konstanten  $C_k$  in der Form

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e(\lambda_k \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e_k(\xi) \quad (28b)$$

verallgemeinerungsfähig, wobei die Funktionen

$$e(\lambda_k \xi) = \sin \lambda_k \xi - \frac{a_{12}}{a_{11}} \lambda_k \cos \lambda_k \xi \quad (28c)$$

die der jeweiligen Eulerlast

$$P_k = \lambda_k^2 \frac{E_b J_i}{l^2} \quad (28d)$$

zugehörige Knickfigur darstellen, die man als die Eigenfunktionen des Systems bezeichnet.

Nunmehr wieder das vorliegende Problem betrachtend, setzen wir für den Zusatz-Zustand  $W_1^*$  die das Randwertproblem (24) befriedigende Produktlösung

$$W_1^*(\xi, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(\varphi) e(\lambda_k \xi) \quad (29a)$$

an, und erhalten mit

$$\frac{\partial^2 W_1^*}{\partial \xi^2} = - \sum_{k=1}^{\infty} [\lambda_k^2 \Phi_k] e(\lambda_k \xi) \quad \text{und} \quad \nu_k = \frac{P_k}{P} \quad (29b)$$

nach Einsetzen in (15a)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (\nu_k - 1) \Phi_k - \beta_{1M} e^{\kappa_1 \varphi} \int_0^{\varphi} \Phi_k e^{-\kappa_1 \chi} d\chi + \beta_{2M} e^{\kappa_2 \varphi} \int_0^{\varphi} \Phi_k e^{-\kappa_2 \chi} d\chi \right] e(\lambda_k \xi) = \\ = - \frac{E_b J_i}{Pl^2} \psi_1(\xi, \varphi). \end{aligned} \quad (29c)$$

Beachtet man hierbei noch die Orthogonalität der Eigenfunktionen

$$\int_{\xi=0}^1 e(\lambda_i, \xi) e(\lambda_k \xi) d\xi = 0 \quad \text{für } i \neq k,$$

was man mit Hilfe der Differentialgleichung (25) unter Heranziehung der Randbedingungen (26) leicht nachweist, so erhält man schließlich mit

$$\int_0^1 e^2(\lambda_k \xi) d\xi = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} + \left( \frac{a_{12}}{a_{11}} \right)^2 \lambda_k^2 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \cos 2\lambda_k + \left[ \left( \frac{a_{12}}{a_{11}} \right)^2 \lambda_k^2 - 1 \right] \frac{\sin 2\lambda_k}{2\lambda_k} \right\} = \delta_k \quad (29d)$$

nachdem man (29c) mit einer (beliebigen) Eigenfunktion multipliziert und hernach hinsichtlich  $\xi$  in den Grenzen von 0 bis 1 integriert, das System der Integralgleichungen

$$\begin{aligned} (\nu_k - 1) \Phi_k - \beta_{1M} e^{\kappa_1 \varphi} \int_0^{\varphi} \Phi_k e^{-\kappa_1 \chi} d\chi + \beta_{2M} e^{\kappa_2 \varphi} \int_0^{\varphi} \Phi_k e^{-\kappa_2 \chi} d\chi = - A_k(\varphi), \\ k = 1 \dots \infty, \end{aligned} \quad (30a)$$

wobei die Funktionen  $A_k(\varphi)$  die „Fourierkoeffizienten“ der Entwicklung der rechten Seite von (29c) nach den Eigenfunktionen  $e(\lambda_k \xi)$  bedeuten.

Man erhält

$$A_k(\varphi) = A_{Nk} f_N(\varphi) + A_{Mk} f_M(\varphi) \quad (30b)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} A_{Nk} &= \frac{1}{\delta_k} \left[ \frac{J_i}{F_i} + \frac{\varepsilon_i E_b J_i}{P \varphi_n} \right] \left[ \frac{1 - \cos \lambda_k}{\lambda_k} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \sin \lambda_k \right], \\ A_{Mk} &= \frac{1}{\delta_k} \int_{\xi=0}^1 \frac{M_0^*(\xi)}{P} e(\lambda_k \xi) d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (30c)$$

Die Gleichungen (30a) werden durch Rückgang auf die zugehörigen Differentialgleichungen gelöst, die man auch unmittelbar erhält, wenn man den Ansatz (29a) in die Gleichungen (15b) bzw. (15d) einführt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} (\nu_k - 1) \ddot{\Phi}_k - [(\nu_k - 1)(\kappa_1 + \kappa_2) + \beta_{1M} - \beta_{2M}] \dot{\Phi}_k + \\ + [(\nu_k - 1)\kappa_1 \kappa_2 - \kappa_1 \beta_{2M} + \kappa_2 \beta_{1M}] \Phi_k \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} = -e^{\kappa_2 \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left[ e^{(\kappa_1 - \kappa_2)\varphi} \frac{d}{d\varphi} (A_k e^{-\kappa_1 \varphi}) \right] = -[\ddot{A}_k - (\kappa_1 + \kappa_2) \dot{A}_k + \kappa_1 \kappa_2 A_k] = \\ = \kappa_1 \kappa_2 \left[ \frac{\alpha F_b}{n J_e} A_{Nk} + \left( \frac{J_i}{n J_e} - 1 \right) A_{Mk} \right] \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} (\nu_k - 1) \ddot{\Phi}_k + \left[ (\nu_k - 1) + \frac{n F_e}{F_i} \left( \nu_k \frac{n \bar{J}_e}{J_i} - 1 \right) - \nu_k \alpha_b \right] \dot{\Phi}_k + \frac{n F_e}{F_i} \left( \nu_k \frac{n \bar{J}_e}{J_i} - 1 \right) \Phi_k = \\ = -\frac{n F_e}{F_i} \left[ \frac{\alpha F_b}{J_i} A_{Nk} + \left( 1 - \frac{n \bar{J}_e}{J_i} \right) A_{Mk} \right]. \end{aligned} \quad (31b)$$

Ihre allgemeine Lösung lautet mit den zunächst willkürlichen Konstanten  $C_{1k}$  und  $C_{2k}$

$$\begin{aligned} \Phi_k = C_{1k} e^{\omega_{1k} \varphi} + C_{2k} e^{\omega_{2k} \varphi} - \frac{1}{\nu_k - 1} \left[ A_k(\varphi) + \frac{(\kappa_1 - \omega_{2k})(\kappa_2 - \omega_{2k})}{\omega_{2k} - \omega_{1k}} \int_0^\varphi A_k(\chi) e^{\omega_{2k}(\varphi - \chi)} d\chi - \right. \\ \left. - \frac{(\kappa_1 - \omega_{1k})(\kappa_2 - \omega_{1k})}{\omega_{2k} - \omega_{1k}} \int_0^\varphi A_k(\chi) e^{\omega_{1k}(\varphi - \chi)} d\chi \right], \end{aligned} \quad (32a)$$

wobei die beiden ersten Glieder die Lösung der homogenen Gleichung darstellen, während der Rest ein partikuläres Integral der inhomogenen Gleichung ist, das mit Hilfe der Variation der Konstanten gefunden wurde. Die  $\omega_{1k}$  bzw.  $\omega_{2k}$  sind die Lösungen einer (charakteristischen) quadratischen Gleichung. Es folgen mit

$$\left. \begin{aligned} q_k &= \kappa_1 \kappa_2 - \frac{\kappa_1 \beta_{2M} - \kappa_2 \beta_{1M}}{\nu_k - 1} = \frac{n F_e}{F_i} \frac{\nu_k \frac{n \bar{J}_e}{J_i} - 1}{\nu_k - 1}, \\ p_k &= \kappa_1 + \kappa_2 + \frac{\beta_{1M} - \beta_{2M}}{\nu_k - 1} = \frac{\nu_k \alpha_b}{\nu_k - 1} - (1 + q_k) \end{aligned} \right\} \quad (32b)$$

für die charakteristischen Exponenten

$$\omega_{1, 2, k} = \frac{1}{2} [p_k \pm \sqrt{p_k^2 - 4 q_k}]. \quad (32c)$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten  $C_{1k}$  und  $C_{2k}$  müssen wir die Lösung (32a) in die ursprüngliche Integralgleichung (30a) einsetzen. Sie ist, wie man nach längerer Rechnung erkennt, durch die Lösung (32a) nur dann befriedigt, sofern

$$C_{1k} = C_{2k} = 0$$

werden. Insgesamt erhält man also schließlich als Lösung der Integralgleichung (30a)

$$\begin{aligned} \Phi_k = & -\frac{1}{v_k - 1} \left[ A_k(\varphi) + \frac{(\kappa_1 - \omega_{2k})(\kappa_2 - \omega_{2k})}{\omega_{2k} - \omega_{1k}} \int_0^\varphi A_k(\chi) e^{\omega_{2k}(\varphi - \chi)} d\chi - \right. \\ & \left. - \frac{(\kappa_1 - \omega_{1k})(\kappa_2 - \omega_{1k})}{\omega_{2k} - \omega_{1k}} \int_0^\varphi A_k(\chi) e^{\omega_{1k}(\varphi - \chi)} d\chi \right]. \end{aligned} \quad (32d)$$

Hiermit ist nun im Sinne des Ansatzes (29a) die allgemeine Lösung für Stäbe konstanter Steifigkeit gefunden. Bemerkenswert ist hierbei noch, daß wegen  $\Phi_k(0) = 0$  die Anfangsbedingung  $W_1^*(\xi, 0) = 0$  von vornherein erfüllt ist. Dies leuchtet ein, da in der ursprünglichen Integralgleichung keine Ableitungen von  $\Phi$  nach  $\varphi$  vorkommen, so daß auch keine Integrationskonstanten zur Erfüllung eines Anfangswertproblems zur Verfügung stehen können.

Beachtet man in (32d) noch (30b), so läßt sich die Zeitfunktion mit

$$\bar{f}_{Nk}(\varphi) = \frac{a F_b}{J_i} \frac{1}{v_k \frac{n \bar{J}_e}{J_i} - 1} \left[ 1 + \frac{\omega_{1k}(1 + \omega_{2k})}{\omega_{2k} - \omega_{1k}} e^{\omega_{2k}\varphi} - \frac{\omega_{2k}(1 + \omega_{1k})}{\omega_{2k} - \omega_{1k}} e^{\omega_{1k}\varphi} \right], \quad (33a)$$

$$\bar{f}_{Mk}(\varphi) = \frac{J_i}{a F_b} \left( 1 - \frac{n \bar{J}_e}{J_i} \right) \bar{f}_{Nk} + \frac{\alpha_b}{(v_k - 1)(\omega_{2k} - \omega_{1k})} (e^{\omega_{2k}\varphi} - e^{\omega_{1k}\varphi}) \quad (33b)$$

endgültig in der Form

$$\Phi_k(\varphi) = -[A_{Nk} \bar{f}_{Nk}(\varphi) + A_{Mk} \bar{f}_{Mk}(\varphi)] \quad (33c)$$

darstellen.

Erhebliche Vereinfachungen ergeben sich bei symmetrisch bewehrten Querschnitten. Hier wird  $a = 0$ , also  $\bar{f}_{Nk} = 0$ , und mit den Werten nach (7) hat man dann schließlich mit  $\varrho = n \bar{J}_e / J_i$  aus (32c)

$$\omega_{1k} = \frac{1 - v_k \varrho}{v_k - 1}, \quad \omega_{2k} = \kappa_2 = -n F_e / F_i,$$

so daß endgültig aus (33b)

$$\bar{f}_{Mk}(\varphi) = -\frac{1 - \varrho}{v_k \varrho - 1} \left[ e^{-\frac{v_k \varrho - 1}{v_k - 1} \varphi} - 1 \right]$$

hervorgeht. Mit (29a) und (30c) ist damit der Zusatz-Zustand durch

$$W_1^*(\xi, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \varrho}{(v_k \varrho - 1) P \delta_k} \left[ \int_0^1 M_0^*(\xi) e_k(\xi) d\xi \right] \left[ e^{-\frac{v_k \varrho - 1}{v_k - 1} \varphi} - 1 \right] e_k(\xi) \quad (34a)$$

definiert, und für die Zusatzmomente gewinnt man wegen  $M_1^* = -P W_1^*$  dann

$$M_1^*(\xi, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \varrho}{(v_k \varrho - 1) \delta_k} \left[ \int_0^1 M_0^*(\xi) e_k(\xi) d\xi \right] \left[ 1 - e^{-\frac{v_k \varrho - 1}{v_k - 1} \varphi} \right] e_k(\xi) \quad (34b)$$

Da sich die Momente des elastischen Zustandes zur Zeit  $t = 0$  in der Form

$$M_0^*(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_k} \left[ \int_0^1 M_0^*(\xi) e_k(\xi) d\xi \right] e_k(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k}{\nu_k - 1} \frac{1}{\delta_k} \left[ \int_0^1 \widehat{M}(\xi) e_k(\xi) d\xi \right] e_k(\xi) \quad (34c)$$

nach den Eigenfunktionen entwickeln lassen, worin  $\widehat{M}(\xi)$  die (i. allg. statisch unbestimmten) Momente infolge der Quer- und Axialbelastung nach der Theorie erster Ordnung (Lasten werden am unverformten System angreifend gedacht) sind, folgen dementsprechend für die Gesamtmomente nach Addition von (34b) und (34c)

$$M^*(\xi, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_k} \left[ \int_0^1 M_0^*(\xi) e_k(\xi) d\xi \right] \left\{ 1 + \frac{1 - \varrho}{\nu_k \varrho - 1} \left( 1 - e^{-\frac{\nu_k \varrho - 1}{\nu_k - 1} \varphi} \right) \right\} e_k(\xi). \quad (34d)$$

Wie die folgenden Beispiele zeigen, stellt (34a) eine stark konvergierende Reihenentwicklung dar, so daß man im allgemeinen bei den Zusatzmomenten nur das erste Glied ihrer Entwicklung zu berücksichtigen braucht. Für  $\nu_k \varrho = 1$  bleibt das entsprechende Reihenglied endlich, was man mit der L'Hospitalschen Regel leicht nachweist. Es ist

$$\lim_{\nu_k \varrho \rightarrow 1} \frac{1 - \varrho}{\nu_k \varrho - 1} \left[ 1 - e^{-\frac{\nu_k \varrho - 1}{\nu_k - 1} \varphi} \right] = \frac{1 - \varrho}{\nu_k - 1} \varphi = \frac{\varphi}{\nu_k} = \varrho \varphi. \quad (34e)$$

## B. Der beidseitig gelenkig gelagerte Stab mit symmetrischer Bewehrung

Seine Randbedingungen folgen aus (26) mit  $a_{11} = a_{21} = 1$ ,  $a_{12} = a_{22} = 0$ . Demnach hat man aus (27c) die Eigenwertgleichung  $\operatorname{tg} \lambda = 0$  mit den Eigenwerten  $\lambda_k = k \pi$ . Die Eigenfunktionen und zugehörigen Eulerlasten sind nach (28c) und (28d)

$$e_k(\xi) = \sin k \pi \xi, \quad P_k = k^2 \frac{\pi^2 E_b J_i}{l^2}.$$

Mit  $\nu = \nu_1 = P_1/P = \pi^2 E_b J_i / (Pl^2)$  sind dann  $\nu_k = P_k/P = k^2 \nu$  während aus (29d)  $\delta_k = 1/2$  hervorgeht. Führt man an Stelle von  $M_0^*$  die Biegemomente  $\widehat{M}^{(0)}$  aus der gegebenen Belastung am unverformten System ein, so ist, wie man leicht nachweist [s. a. (34c)]

$$\int_0^1 M_0^* \sin k \pi \xi d\xi = \frac{k^2 \nu}{k^2 \nu - 1} \int_0^1 \widehat{M}^{(0)} \sin k \pi \xi d\xi,$$

so daß man endgültig für die Momente infolge des Betonkriechens

$$M_1^*(\xi, \varphi) = 2(1 - \varrho) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \nu \sin k \pi \xi}{(k^2 \nu - 1)(k^2 \nu \varrho - 1)} \left[ \int_0^1 \widehat{M}^{(0)}(\xi) \sin k \pi \xi d\xi \right] \left[ 1 - e^{-\frac{k^2 \nu \varrho - 1}{k^2 \nu - 1} \varphi} \right] \quad (35a)$$

und die Zusatzdurchsenkungen

$$W_1^*(\xi, \varphi) = w_1^*(\xi, \varphi) = -M_1^*(\xi, \varphi)/P \quad (35b)$$

erhält. Wir betrachten spezielle Beispiele:



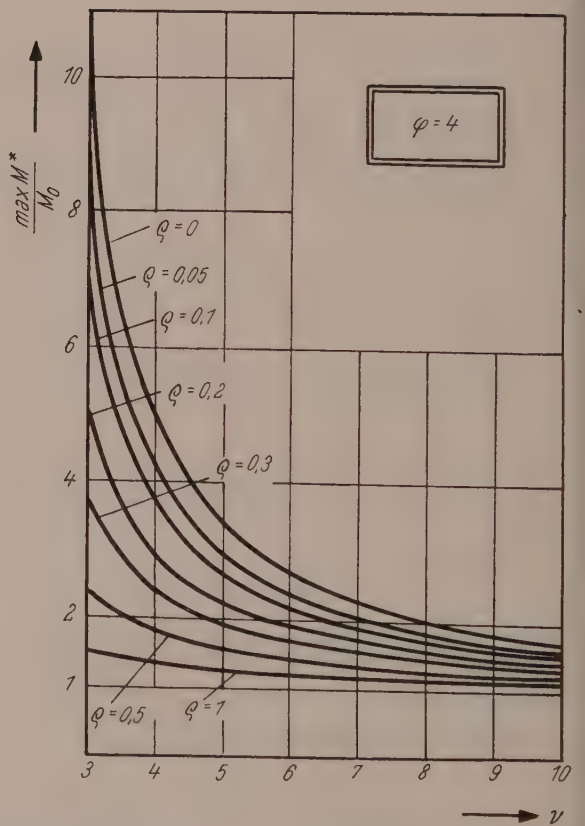
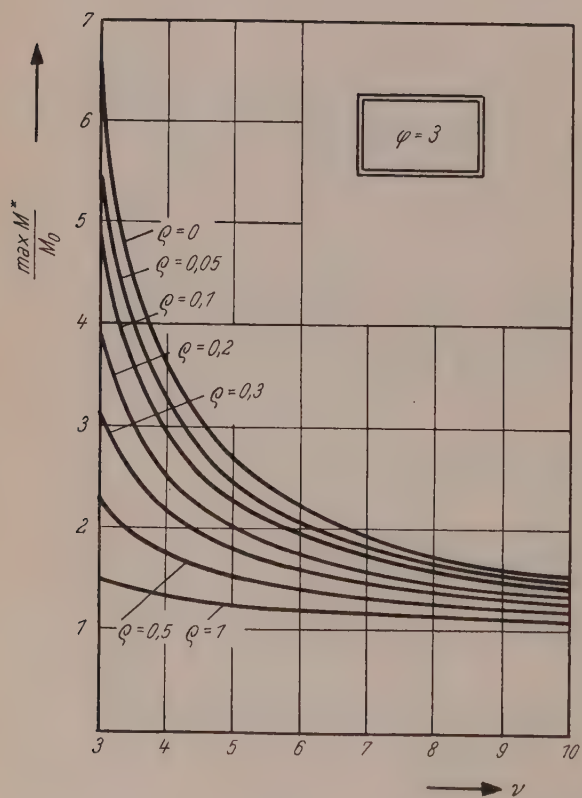
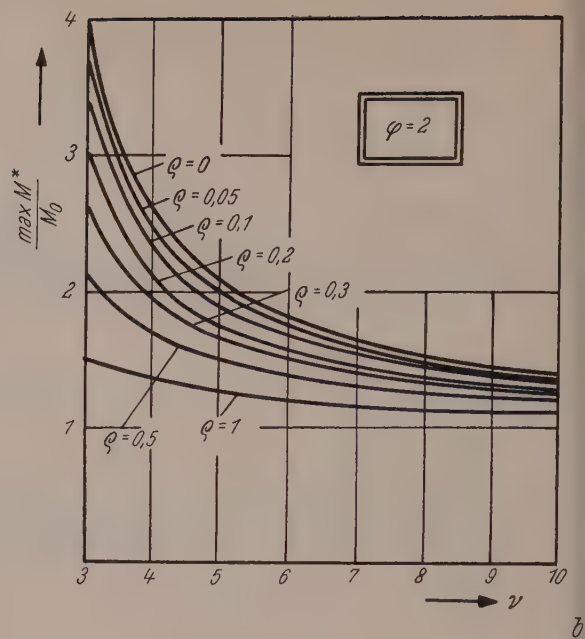
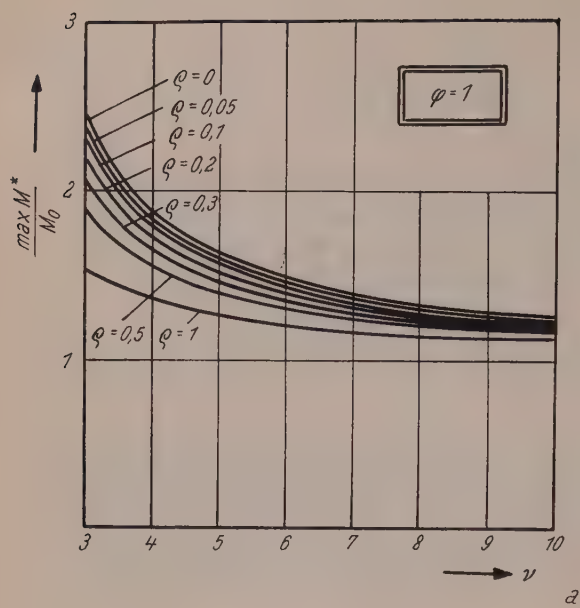


Abb. 7 a - d.

a) Der durch  $\widehat{M}^{(0)}(\xi) = M_0 \sin \pi \xi$  belastete Stab

Dieser Spezialfall ist bereits von Dischinger<sup>1</sup> für den bewehrungslosen Stab untersucht worden. Wir erhalten aus (35a)

$$M_1^*(\xi, \varphi) = M_0 \frac{\nu}{\nu-1} \frac{1-\varrho}{\nu\varrho-1} \left[ 1 - e^{-\frac{\nu\varrho-1}{\nu-1}\varphi} \right] \sin \pi \xi. \quad (36a)$$

Mit

$$M_0^*(\xi) = M_0 \frac{\nu}{\nu-1} \sin \pi \xi \quad (36b)$$

erhält man dann die Gesamtmomente

$$M^*(\xi, \varphi) = M_0 \frac{\nu}{\nu-1} \left[ 1 + \frac{1-\varrho}{\nu\varrho-1} \left( 1 - e^{-\frac{\nu\varrho-1}{\nu-1}\varphi} \right) \right] \sin \pi \xi. \quad (36c)$$

In Abb. 7 a-d sind die Werte  $\max M^*/M_0$  (für  $\xi = 1/2$ ) für verschiedene Werte  $\varphi$ ,  $\varrho$  und  $\nu$  angegeben. Dabei stellen die Grenzkurven für  $\varrho = 0$  (reiner Betonquerschnitt), wofür sich aus (36c)

$$\max M_{\varrho=0}^* = M_0 \frac{\nu}{\nu-1} e^{\frac{\varphi}{\nu-1}}$$

ergibt, die von Dischinger angegebenen Kurven dar. Der Wert  $\varrho = 1$  (reiner Stahlquerschnitt) gibt mit den gewöhnlichen elastischen Verformungsmomenten

$$\max M_{\varrho=1}^* = \max M_0^* = M_0 \frac{\nu}{\nu-1}$$

die unteren Grenzkurven wieder.

Mit 
$$W_0^*(\xi) = -\frac{M_0}{P} \frac{1}{\nu-1} \sin \pi \xi \quad (36d)$$

und den aus (35b) folgenden Zusatzverformungen

$$W_1^*(\xi, \varphi) = -\frac{M_0}{P} \frac{\nu}{\nu-1} \frac{1-\varrho}{\nu\varrho-1} \left[ 1 - e^{-\frac{\nu\varrho-1}{\nu-1}\varphi} \right] \sin \pi \xi \quad (36e)$$

hat man die Gesamtverformungen

$$W^*(\xi, \varphi) = w^*(\xi, \varphi) = -\frac{M_0}{P} \frac{1}{\nu-1} \left[ 1 + \frac{\nu(1-\varrho)}{\nu\varrho-1} \left( 1 - e^{-\frac{\nu\varrho-1}{\nu-1}\varphi} \right) \right] \sin \pi \xi. \quad (36f)$$

Mit der Größtdurchsenkung  $W_0 = w_0 = -M_0 l^2 / (\pi^2 E_b J_i)$  des Balkens infolge der am anfänglich unverformten System wirkenden Momente  $\widehat{M}^{(0)} = M_0 \sin \pi \xi$  wird dann

$$W^*(\xi, \varphi) = W_0 \frac{\nu}{\nu-1} \left[ 1 + \frac{\nu(1-\varrho)}{\nu\varrho-1} \left( 1 - e^{-\frac{\nu\varrho-1}{\nu-1}\varphi} \right) \right] \sin \pi \xi. \quad (36g)$$

In Abb. 8a-c sind  $W_{\max}^*/W_0$  (für  $\xi = 1/2$ ) für verschiedene Werte  $\nu$  und  $\varrho$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  angegeben. Für  $\nu\varrho = 1$  ergibt sich der Grenzwert

$$W_{\max}^*/W_0 = \frac{\nu}{\nu-1} (1 + \varphi),$$

<sup>1</sup> s. S. 237.

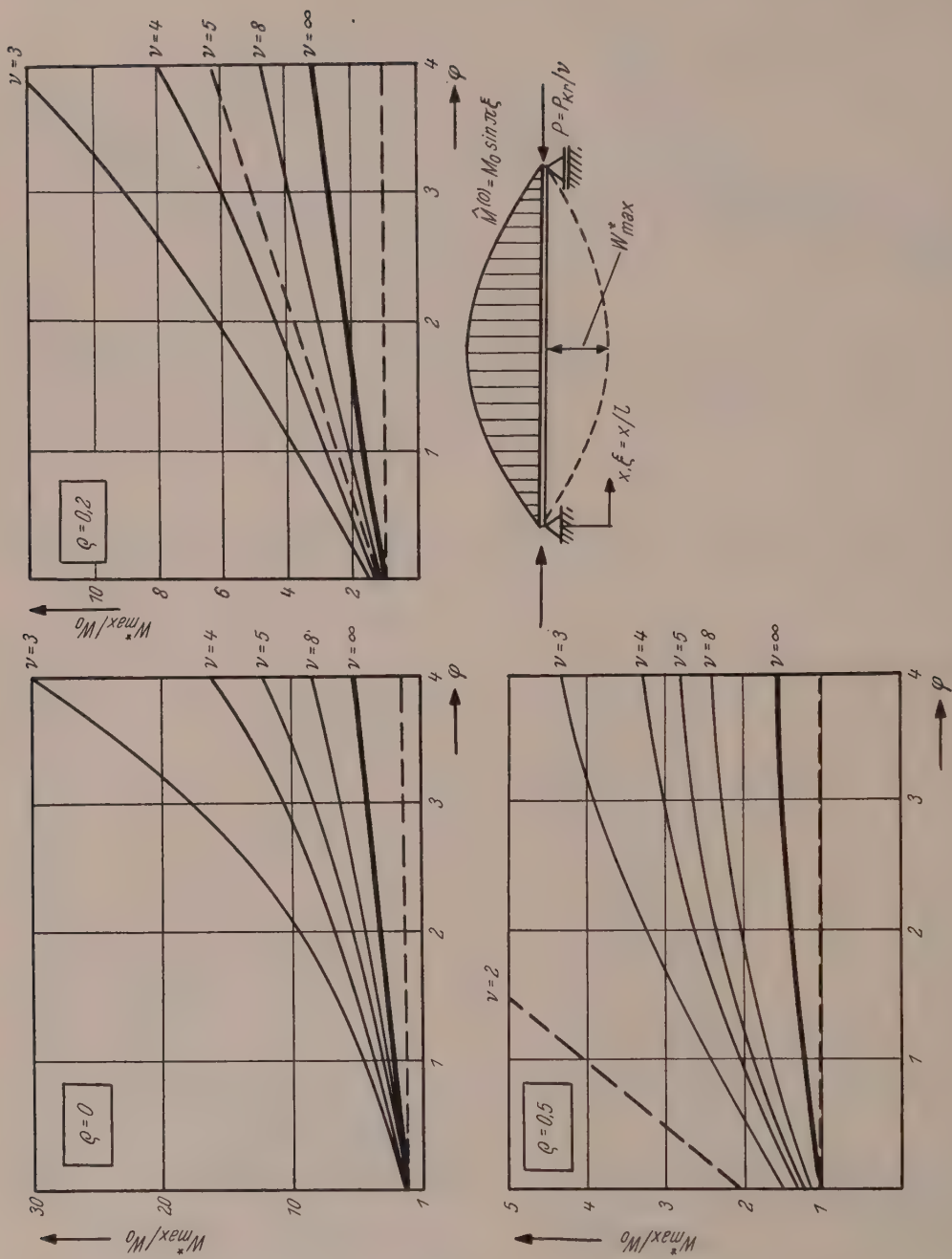


Abb. 8 a - c.

was einem linearen Verlauf hinsichtlich  $\varphi$  entspricht (gestrichelte Grade). Oberhalb dieser Grade sind die Kurven jeweils nach oben, unterhalb der Grade nach unten gekrümmt. Für  $\nu \rightarrow \infty$ , also fehlender Axiallast ergibt sich

$$W^* \max / W_0 = 1 + \frac{1 - \varrho}{\varrho} [1 - e^{-\varrho \varphi}] = 1 + f_M(\varphi)$$

was man auch unmittelbar aus (4a) mit (7) folgern kann.

b) Stab mit Einzelmoment  $M_0$  am Ende

Für die Verformungsmomente  $M_0^*(\xi)$  zur Zeit  $t = 0$  erhält man

$$M_0^*(\xi) = M_0 \frac{\sin(\pi \xi / \sqrt{\nu})}{\sin(\pi / \sqrt{\nu})}, \quad (37a)$$

während sich der durch das Kriechen bedingte Anteil mit  $\hat{M}^{(0)}(\xi) = M_0 \xi$  und

$$\int_0^1 \hat{M}^{(0)}(\xi) \sin k \pi \xi d\xi = (-1)^{k+1} \frac{M_0}{k \pi}$$

aus (35a) letztlich zu

$$\begin{aligned} M_1^*(\xi, \varphi) &= \frac{2}{\pi} M_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k \nu (1 - \varrho)}{(k^2 \nu - 1)(k^2 \nu \varrho - 1)} \left[ 1 - e^{\frac{1 - k^2 \nu \varrho}{k^2 \nu - 1} \varphi} \right] \sin k \pi \xi = \\ &= \frac{2}{\pi} M_0 \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\varphi) \sin k \pi \xi \end{aligned} \quad (37b)$$

ergibt. Betrachten wir die, für die Konvergenz ungünstigsten Verhältnisse  $\varrho = 0$  und  $\nu = 3^*$ , so hat man

$$|a_1(\varphi)| = \frac{3}{2} [e^{\varphi/2} - 1], \quad |a_2(\varphi)| = \frac{6}{11} [e^{\varphi/11} - 1]$$

also 
$$a_{21}(\varphi) = \frac{|a_2(\varphi)|}{|a_1(\varphi)|} = \frac{12}{33} \frac{e^{\varphi/11} - 1}{e^{\varphi/2} - 1}$$

(Abb. 9). Der Größtwert dieses Quotienten (8%) liegt bei  $\varphi = 0$  vor, was ohnehin uninteressant ist, da hierfür die Zusatzlösung  $M_1^*$  verschwindet. Schon für den sicherlich immer eintretenden Fall  $\varphi = 2$  beträgt das zweite Reihenglied maximal 4% des Größtwertes des ersten Gliedes, während die Verhältnisse für größere Kriechzahlen immer günstiger werden. Wir begnügen uns mit dem ersten Zusatzglied, und haben damit für die endgültigen Verformungsmomente (Abb. 10a-d):

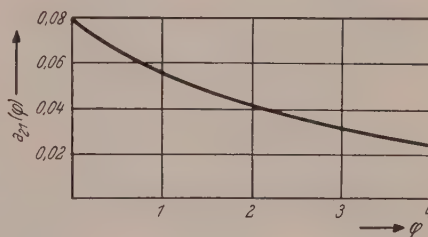


Abb. 9.

$$\begin{aligned} M^*(\xi, \varphi) &= M_0^* + M_1^* \approx M_0 \left\{ \frac{\sin(\pi \xi / \sqrt{\nu})}{\sin(\pi / \sqrt{\nu})} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\pi} \frac{\nu (1 - \varrho)}{(\nu - 1)(\nu \varrho - 1)} \left[ 1 - e^{-\frac{\nu \varrho - 1}{\nu - 1} \varphi} \right] \sin \pi \xi \right\} \end{aligned} \quad (37c)$$

\* Kleinere Werte  $\nu$  wollen wir ausschließen



c) Stab mit gleichmäßiger Belastung  $q(x) = q_0$ .

Die Verformungsmomente  $M_0^*(\xi)$  zur Zeit  $t = 0$  sind

$$M_0^*(\xi) = \frac{8\nu}{\pi^2} M_0 \left[ \frac{\sin [\pi (1 - \xi)/\sqrt{\nu}]}{\sin (\pi/\sqrt{\nu})} + \frac{\sin (\pi \xi/\sqrt{\nu})}{\sin (\pi/\sqrt{\nu})} - 1 \right], \quad M_0 = \frac{q_0 l^2}{8}, \quad (38a)$$

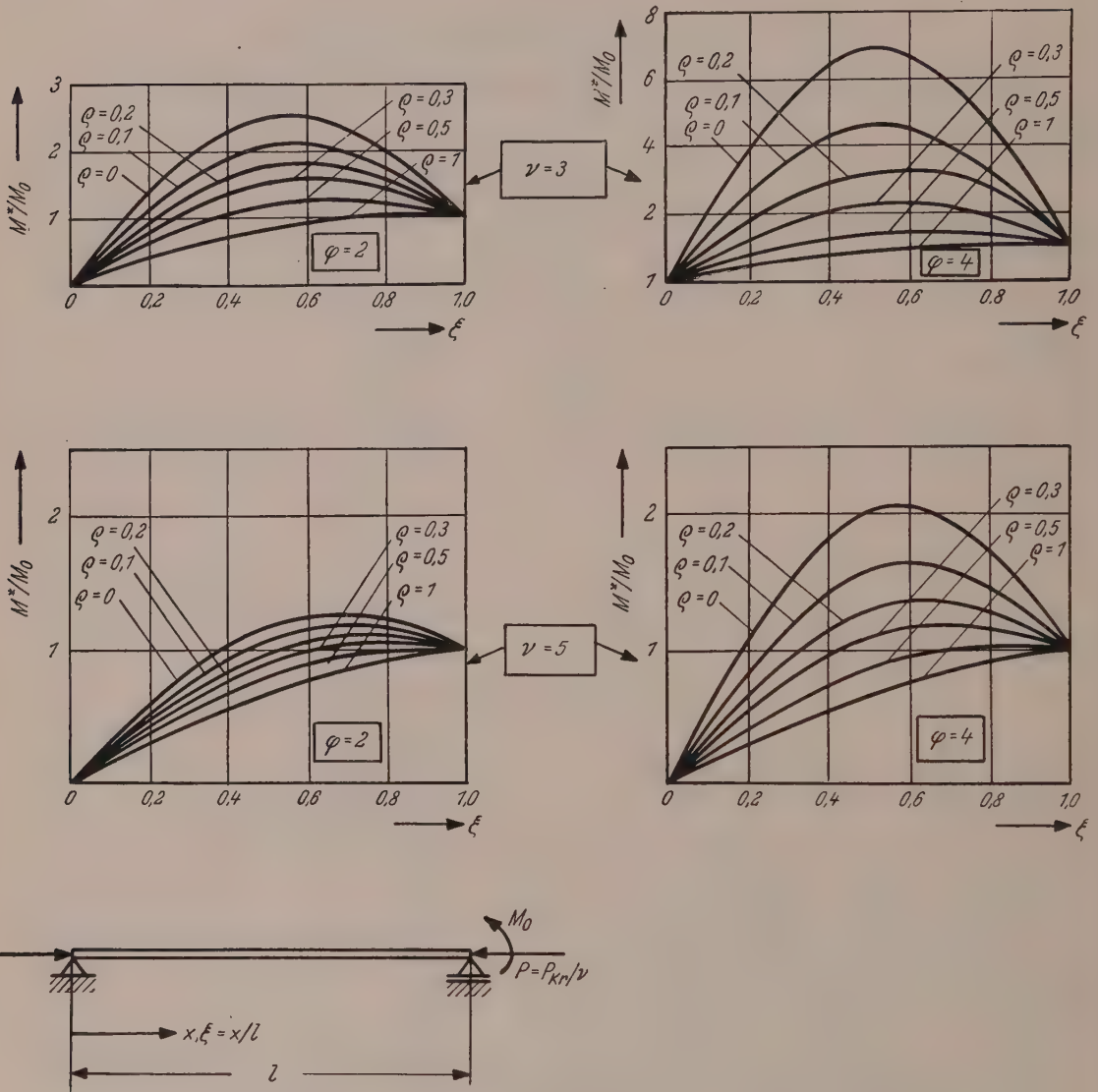


Abb. 10 a - d.

und der durch das Kriechen bedingte Anteil folgt mit  $\hat{M}^{(0)}(\xi) = 4 M_0 (\xi - \xi^2)$  und

$$\int_0^1 \hat{M}^{(0)}(\xi) \sin k \pi \xi d\xi = \begin{cases} 16 M_0 / (\pi^3 k^3) & \text{für } k = 1, 3, 5 \dots (2n + 1) \\ 0 & \text{für } k = 2, 4, 6 \dots 2n \end{cases}$$

aus (35a) zu

$$M_1^*(\xi, \varphi) = \frac{32}{\pi^3} M_0 \nu (1 - \varrho) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[ 1 - e^{-\frac{(2n+1)^2 \nu \varrho - 1}{(2n+1)^2 \nu - 1} \varphi} \right] \sin(2n+1) \pi \xi}{(2n+1) [(2n+1)^2 \nu - 1] [(2n+1)^2 \nu \varrho - 1]} \quad (38b)$$

Hier ist der Quotient zweier aufeinanderfolgender Reihenglieder im ungünstigsten Falle ( $\varrho = 0, \nu = 3, \varphi = 0$ )

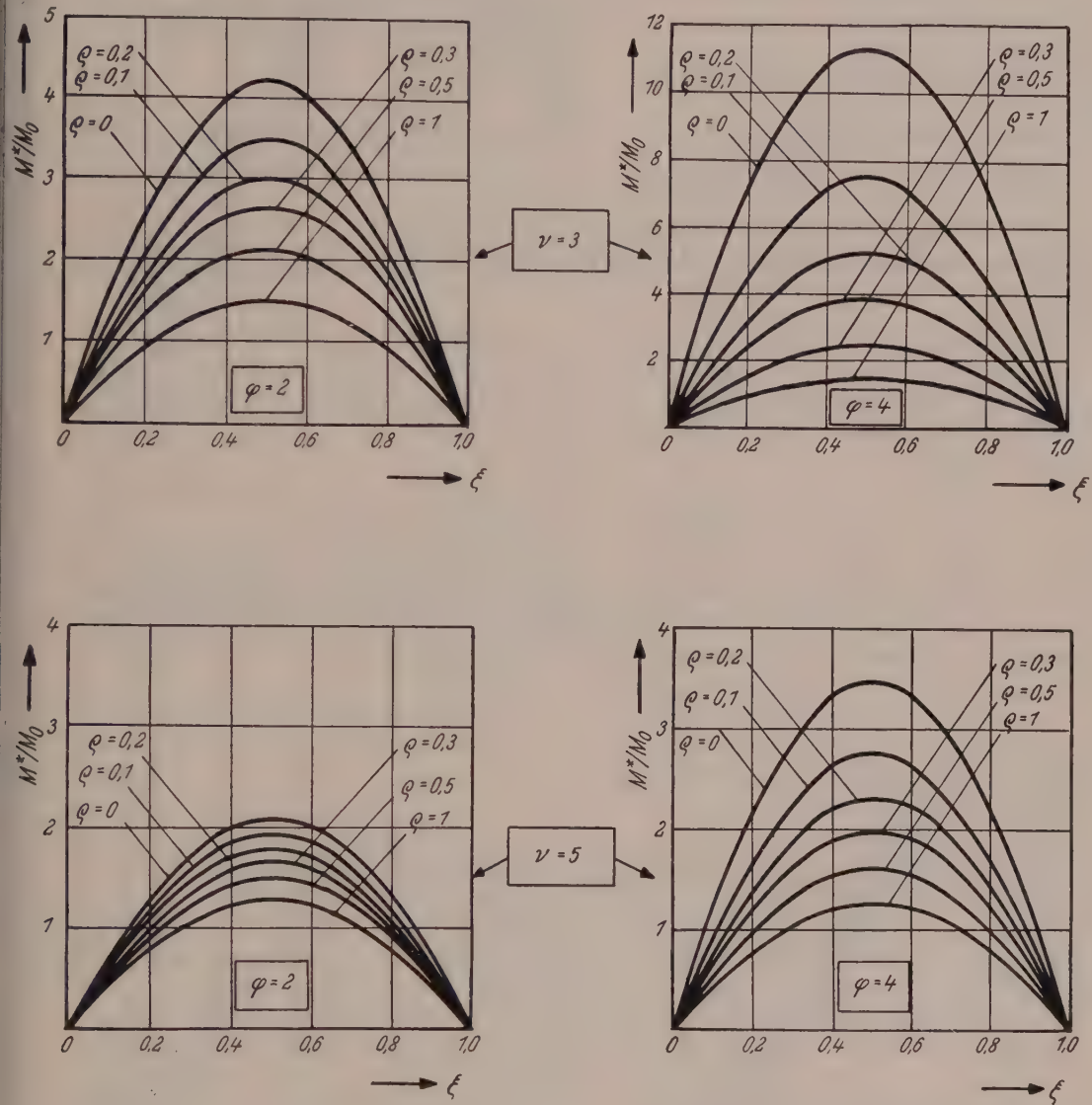
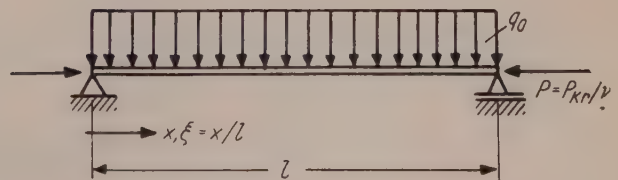


Abb. 11a - d.



$$\max a_{21} = \frac{4}{26 \cdot 78} = 0,00197,$$

so daß wiederum allein das erste Reihenglied berücksichtigt zu werden braucht. Man hat also endgültig (Abb. 11a-d).

$$M^*(\xi, \varphi) \approx \frac{8\nu}{\pi^2} M_0 \left\{ \frac{\sin [\pi (1 - \xi)/\sqrt{\nu}]}{\sin (\pi/\sqrt{\nu})} + \frac{\sin (\pi \xi/\sqrt{\nu})}{\sin (\pi/\sqrt{\nu})} - 1 + \right. \\ \left. + \frac{4(1 - \varrho)}{\pi} \left[ 1 - e^{-\frac{\nu \varrho - 1}{\nu - 1} \varphi} \right] \frac{\sin \pi \xi}{(\nu - 1)(\nu \varrho - 1)} \right\} \quad (38c)$$

C. Stab mit einem eingespannten und einem gelenkig gelagerten Ende unter gleichmäßiger Belastung  $q(x) = q_0$  (symmetr. Bewehrung)

Das Randwertproblem (21a) wird mit (24) durch  $a_{11} = a_{12} = a_{21} = 1$ ,  $a_{22} = 0$  beschrieben. Folglich hat man aus (27c) die Eigenwertgleichung  $\operatorname{tg} \lambda = \lambda$  mit den Lösungen

$$\lambda_1 = 4,493; \lambda_2 = 7,725; \lambda_3 = 10,904; \lambda_4 = 14,066; \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Mit } \lambda_k = \zeta_k \lambda_1 \left( \zeta_1 = 1; \zeta_2 = 1,72; \zeta_3 = 2,43; \zeta_4 = 3,136; \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2\lambda_1} \right)$$

erhält man dann

$$\nu_k = \frac{P_k}{P} = \frac{\lambda_k^2 E_b J_i}{P l^2} = \zeta_k^2 \frac{\lambda_1^2 E_b J_i}{P l^2} = \zeta_k^2 \nu,$$

wobei  $\nu = \nu_1 = \lambda_1^2 E_b J_i / P l^2$  bedeutet. Die Eigenfunktionen sind nach (28c)  $e_k(\xi) = \sin \lambda_k \xi - \lambda_k \cos \lambda_k \xi$  während aus (29d)  $\delta_k = \lambda_k^2 / 2 = \zeta_k^2 \cdot \lambda_1^2 / 2$  hervorgeht. Die (statisch unbestimmten) Momente infolge der Belastung  $q_0$  sind

$$M(\xi) = -M_0 [1 - 5\xi + 4\xi^2], \quad M_0 = q_0 l^2 / 8,$$

und es ergibt sich nach einiger Rechnung

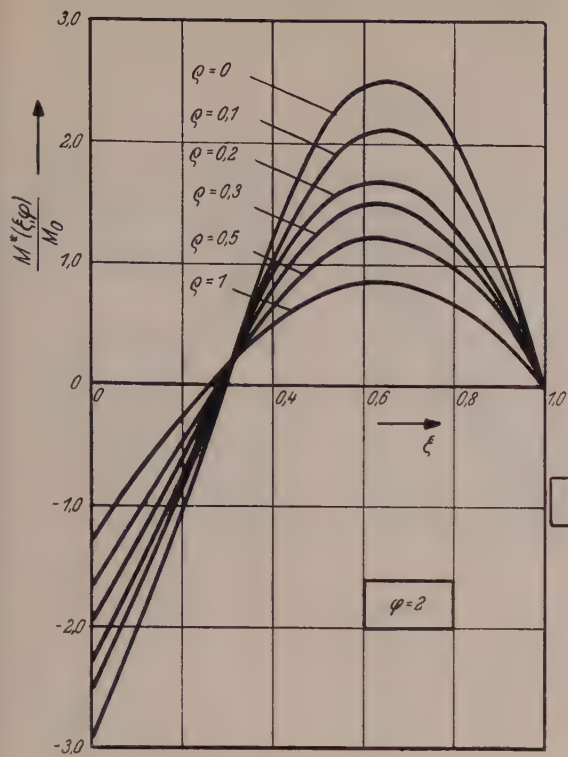
$$\int_0^1 M_0^* e_k d\xi = \frac{\nu_k}{\nu_k - 1} \int_0^1 \widehat{M} e_k d\xi = \frac{\zeta_k^2 \nu}{\zeta_k^2 \nu - 1} \cdot \frac{4 M_0}{\lambda_k} \operatorname{tg}^2 (\lambda_k / 2),$$

so daß endgültig für die durch das Kriechen bedingten Zusatzmomente aus (34b)

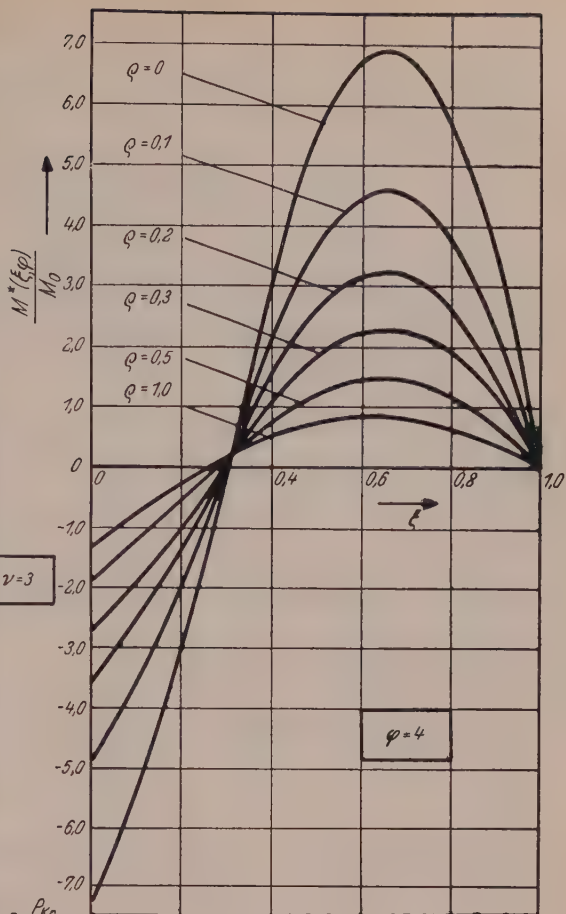
$$M_1^*(\xi, \varphi) = \frac{8 M_0 (1 - \varrho) \nu}{\lambda_1^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^2 (\lambda_k / 2)}{[\zeta_k^2 \nu - 1] [\zeta_k^2 \nu \varrho - 1]} \left[ 1 - e^{-\frac{\zeta_k^2 \nu \varrho - 1}{\zeta_k^2 \nu - 1} \varphi} \right] \cdot \frac{e_k(\xi)}{\zeta_k} \quad (39a)$$

entsteht. Beachten wir, daß  $e_k(\xi)/\zeta_k$  für alle  $k$  immer dieselbe Größenordnung besitzt, so können wir an Hand der Größen

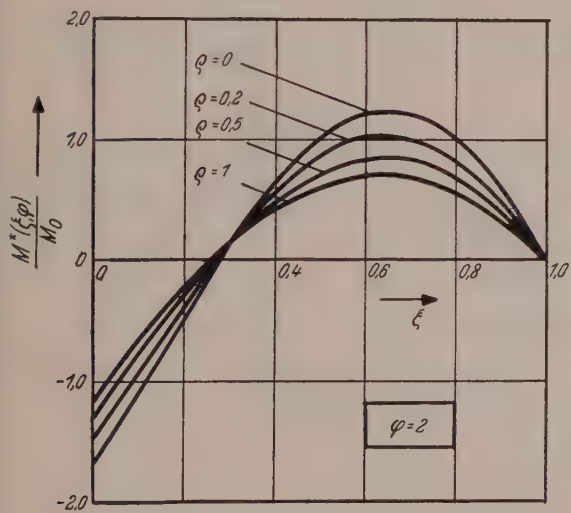
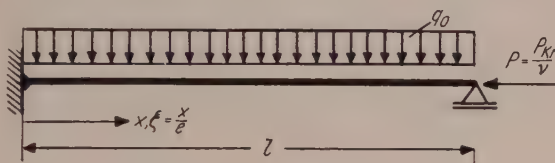
$$a_k = \frac{\operatorname{tg}^2 (\lambda_k / 2)}{[\zeta_k^2 \nu - 1] [\zeta_k^2 \nu \varrho - 1]} \left[ 1 - e^{-\frac{\zeta_k^2 \nu \varrho - 1}{\zeta_k^2 \nu - 1} \varphi} \right]$$



$\nu=3$

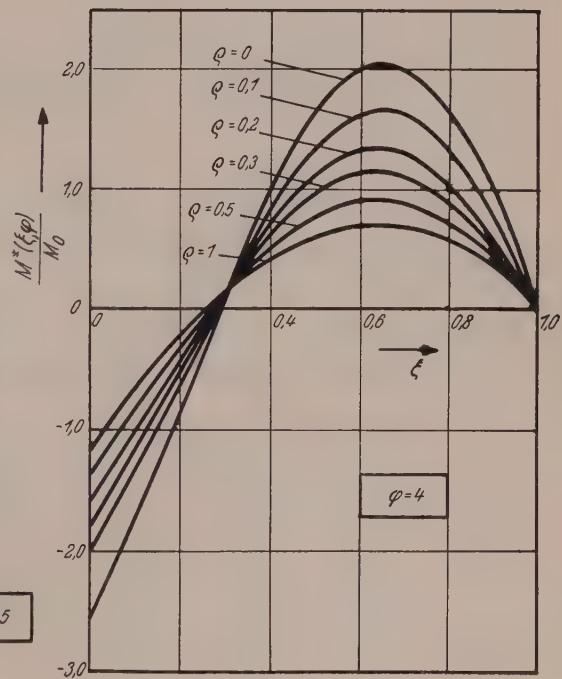


$\varphi=4$



$\varphi=2$

$\nu=5$



$\varphi=4$

Abb. 12 a — d



eine Abschätzung hinsichtlich der Konvergenz der Entwicklung (39a) gewinnen. Im ungünstigsten Falle ( $\varrho = 0$ ,  $\varphi = 0$  und  $\nu = 3$ ) ergibt sich

$$\left| \frac{a_2}{a_1} \right| = \left[ \frac{\operatorname{tg} \lambda_2/2}{\operatorname{tg} \lambda_1/2} \frac{3 \xi_1^2 - 1}{3 \xi_2^2 - 1} \right]^2 = 0,0328.$$

Obwohl die Konvergenz, verglichen mit (38b), also derselben Belastung am statisch bestimmten Balken, schon etwas schlechter ist, begnügen wir uns auch hier mit dem ersten Gliede der Entwicklung, und erhalten in ausgezeichnete Näherung mit  $\operatorname{tg}^2 (\lambda_1/2) = 1,535$

$$M_1^* (\xi, \varphi) \approx 0,1378 M_0 (1 - \varrho) \frac{\nu}{(\nu - 1)(\nu \varrho - 1)} \left[ 1 - e^{-\frac{\nu \varrho - 1}{\nu - 1} \varphi} \right] (\sin \lambda_1 \xi - \lambda_1 \cos \lambda_1 \xi). \quad (39b)$$

Die elastischen Verformungsmomente zur Zeit  $t = 0$  ergeben sich, wie bekannt, zu

$$M_0^* (\xi) = M_0 \frac{8}{\lambda_1^2} \nu \left[ \frac{(\lambda_1^2/\nu) + 2 - 2 \cos (\lambda_1/\sqrt{\nu}) - 2 (\lambda_1/\sqrt{\nu}) \sin (\lambda_1/\sqrt{\nu})}{2 \sin (\lambda_1/\sqrt{\nu}) - 2 (\lambda_1/\sqrt{\nu}) \cos (\lambda_1/\sqrt{\nu})} \sin \frac{\lambda_1}{\sqrt{\nu}} (1 - \xi) + \right. \\ \left. + \cos \frac{\lambda_1}{\sqrt{\nu}} (1 - \xi) - 1 \right]. \quad (39c)$$

In Abb. 12a-d sind die endgültigen Verformungsmomente

$$M^* (\xi, \varphi) = M_0^* (\xi) + M_1^* (\xi, \varphi) \quad (39d)$$

für einige Werte von  $\nu$ ,  $\varrho$  und  $\varphi$  in Abhängigkeit der Balkenordinate  $\xi$  graphisch dargestellt.

#### D. Beidseitig eingespannter symmetrisch bewehrter Stab unter gleichmäßiger Belastung $q(x) = q_0$

Dem zugehörigen Randwertproblem (23a) wird durch (24) mit  $a_{11} = a_{21} = 0$ ,  $a_{12} = a_{22} = 1$  entsprochen. Dabei muß  $e_k(0) = e_k(1)$  sein. Dies und die sich für den vorliegenden Fall ergebende Eigenwertgleichung  $\operatorname{tg} \lambda = 0$  liefern als Eigenwerte  $\lambda_k = 2 k \pi$ , also

$$\nu_k = \frac{P_k}{P} = k^2 \frac{4 \pi^2 E_b J_i}{P l^2} = k^2 \nu, \quad \nu = 4 \pi^2 E_b J_i / (P l^2).$$

Denken wir uns in (28a) die Konstante  $C$  durch  $D$  nach (27d) ausgedrückt, so erhält man schließlich

$$e_k (\xi) = \cos 2 k \pi \xi$$

und nach (29d)  $\delta_k = 1/2$ .

Die (statisch unbestimmten) Momente infolge  $q_0$  sind

$$\widehat{M} (\xi) = M_0 \left[ -\frac{2}{3} + 4 \xi - 4 \xi^2 \right], \quad M_0 = \varrho_0 l^2 / 8$$

und weiterhin hat man

$$\int_0^1 M_0^* e_k d\xi = \frac{k^2 \nu}{k^2 \nu - 1} \int_0^1 \widehat{M} e_k d\xi = -\frac{k^2 \nu}{k^2 \nu - 1} \cdot \frac{2 M_0}{k^2 \pi^2} = -\frac{2 \nu M_0}{\pi^2 (k^2 \nu - 1)}.$$

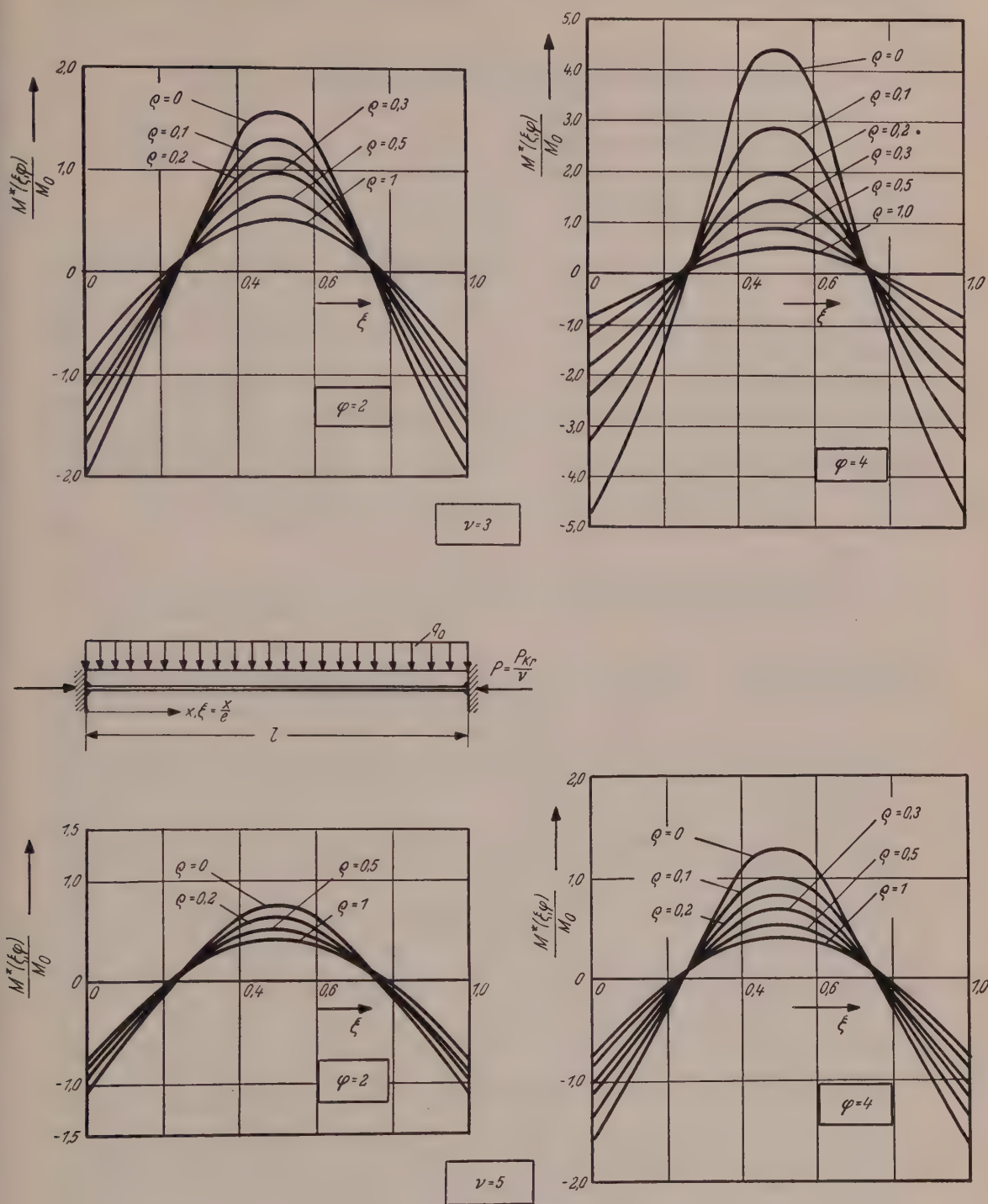


Abb. 13 a — d.

Es folgt somit schließlich für die, durch das Kriechen bedingten Zusatzmomente aus (34b)

$$\begin{aligned} M_1^*(\xi, \varphi) &= -\frac{4}{\pi^2} M_0 (1 - \varrho) \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[1 - e^{-\frac{k^2 \nu \varphi - 1}{k^2 \nu \varrho - 1} \varphi}\right]}{(k^2 \nu - 1)(k^2 \nu \varrho - 1)} \cos 2 k \pi \xi = \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2 k \pi \xi. \end{aligned}$$

Da im ungünstigsten Falle ( $\varrho = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\nu = 3$ )

$$\left| \frac{a_2}{a_1} \right| = \left( \frac{3 \cdot 1^2 - 1}{3 \cdot 2^2 - 1} \right)^2 = 0,0331$$

wird, ist die alleinige Berücksichtigung des ersten Gliedes wieder eine ausgezeichnete Näherung, so daß wir

$$M_1^*(\xi, \varphi) \approx -\frac{4}{\pi^2} M_0 (1 - \varrho) \frac{\nu \cos 2 \pi \xi}{(\nu - 1)(\nu \varrho - 1)} \left[ 1 - e^{-\frac{\nu \varrho - 1}{\nu - 1} \varphi} \right] \quad (40a)$$

setzen können. Die Verformungsmomente zur Zeit  $t = 0$  ergeben sich, wie bekannt, zu

$$M_0^*(\xi) = \frac{M_0}{\pi^2} \nu \left[ \frac{2 \pi}{\sqrt{\nu}} \sin \frac{2 \pi}{\sqrt{\nu}} \xi + \frac{(2 \pi / \sqrt{\nu}) \sin (2 \pi / \sqrt{\nu})}{1 - \cos (2 \pi / \sqrt{\nu})} \cos \frac{2 \pi}{\sqrt{\nu}} \xi - 2 \right]. \quad (40b)$$

Die endgültigen Verformungsmomente  $M^* = M_0^* + M_1^*$  sind für einige Werte  $\nu$ ,  $\varrho$  und  $\varphi$  in Abhängigkeit der Balkenachsenordinate  $\xi$  in Abb. 13 dargestellt.

#### E. Ermittlung der endgültigen Beton- und Stahlspannungen für Stäbe mit symmetrischer Bewehrung unter der Voraussetzung nichtgerissener Zugzone

Für die, von den Eisen aufzunehmenden Verformungsmomente erhält man mit  $M_1^* = -P W_1^*$

$$M_e^* = \frac{E_e \bar{J}_e}{l^2} W^{*''}(\xi) = \frac{E_b J_i}{l^2} \varrho [W_0^{*''} + W_1^{*''}] = \varrho M_0^* - \frac{\varrho}{P} \frac{E_b J_i}{l^2} M_1^{*''}(\xi).$$

Mit (34b) folgt dann wegen  $e_k'' = -\lambda_k^2 e_k$  und  $\nu_k = \lambda_k^2 E_b J_i / (P l^2)$

$$\begin{aligned} M_e^* &= \varrho M_0^* + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k^2 \varrho (1 - \varrho)}{(\nu_k - 1)(\nu_k \varrho - 1) \delta_k} \left[ \int_0^1 \hat{M} e_k d\xi \right] \left[ 1 - e^{-\frac{\nu_k \varrho - 1}{\nu_k - 1} \varphi} \right] e_k(\xi) = \\ &= M_{e0}^* + M_{e1}^*, \end{aligned} \quad (41a)$$

während der Beton den restlichen Momentanteil aufzunehmen hat:

$$\begin{aligned} M_b^* &= M^* - M_e^* = (1 - \varrho) M_0^* + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - \varrho) \nu_k}{(\nu_k - 1) \delta_k} \left[ \int_0^1 \hat{M} e_k d\xi \right] \left[ e^{-\frac{\nu_k \varrho - 1}{\nu_k - 1} \varphi} - 1 \right] \times \\ &\quad \times e_k(\xi) = M_{b0}^* + M_{b1}^*. \end{aligned} \quad (41b)$$

Die zentrische Druckbelastung  $N = P$  und das Schwinden rufen, wie bekannt<sup>1</sup>

<sup>1</sup> s. S. 237

zur Zeit  $t$  folgende Druckkräfte hervor:

a) im Beton

$$N_b = P \frac{F_b}{F_i} e^{-\frac{n F_e}{F_i} \varphi} - \frac{\varepsilon_s E_b F_b}{\varphi_n} \left( 1 - e^{-\frac{n F_e}{F_i} \varphi} \right) \quad (41c)$$

b) im Stahl

$$N_e = P \left[ 1 - \frac{F_b}{F_i} e^{-\frac{n F_e}{F_i} \varphi} \right] + \frac{\varepsilon_s E_b F_b}{\varphi_n} \left( 1 - e^{-\frac{n F_e}{F_i} \varphi} \right) \quad (41d)$$

Die resultierenden extremalen Randspannungen sind dann

$$\text{extr. } \sigma_e^* = \frac{N_e}{F_e} \pm \frac{M_e^*}{W_e}, \quad \text{extr. } \sigma_b^* = \frac{N_b}{F_b} \pm \frac{M_b^*}{W_b}. \quad (41e)$$

Um zu einem einfachen Überblick der Spannungsverteilung zu kommen, betrachten wir speziell eine anfängliche Momentenbelastung  $\hat{M} = M_0 e_1(\xi)$ . In diesem Falle hat man aus (41a, b) mit  $v_1 = v$

$$M_{e1}^* = \varrho (1 - \varrho) \frac{v^2}{(v-1)(v\varrho-1)} \left[ 1 - e^{-\frac{v\varrho-1}{v-1} \varphi} \right] \hat{M}, \quad (42a)$$

$$M_{b1}^* = (1 - \varrho) \frac{v}{v-1} \left[ e^{-\frac{v\varrho-1}{v-1} \varphi} - 1 \right] \hat{M}, \quad (42b)$$

und man erkennt, daß für  $v\varrho > 1$  sogar eine Entlastung des Betonquerschnittes stattfinden kann, da in diesem Falle  $M_{b1}^*/\hat{M} < 0$  wird. Nur für  $v\varrho < 1$  findet infolge der durch das Kriechen bedingten Zusatzdeformationen und damit der Zusatzmomente  $M_1^*$  eine zusätzliche Belastung des Betonquerschnitts statt. Im Spezialfall  $v\varrho = 1$  wird  $M_{b1}^* = 0$ , d. h., es verändern sich die zur Zeit  $t = 0$  vorhandenen Betonbiegespannungen überhaupt nicht. Dies kommt auch in den Durchbiegungskurven der Abb. 8 zum Ausdruck, wo sich für  $v\varrho = 1$  ein mit  $\varphi$  lineares Anwachsen der Durchbiegungen ergibt, was bekanntlich einer konstanten Betonbelastung entspricht. Für  $v\varrho < 1$  wachsen die Durchbiegungen entsprechend der zusätzlichen Betonbelastung stärker als linear, für  $v\varrho > 1$  entsprechend der Betonentlastung schwächer als linear mit  $\varphi$ . Die Stahlteile werden demgegenüber unter dem Einfluß der Zusatzmomente  $M_1^*$  stets zusätzlich belastet, was zu erheblichen Stahlspannungssteigerungen führen kann. Die Stahlspannungen wachsen jedoch für  $v\varrho > 1$ , da sie proportional den Krümmungen  $W''$  sind, schwächer als linear mit  $\varphi$ , so daß die Stahlspannungserhöhungen infolge der zeitabhängigen Vorgänge für diesen Fall geringer sind, als für  $v\varrho < 1$ . Der Konstrukteur sollte also danach trachten, stets  $v\varrho > 1$  zu machen, da er hiermit einerseits eine Entlastung des Betons und andererseits eine nicht allzugroße Stahlspannungssteigerung erreichen kann.

Wir wollen zunächst untersuchen, in welchen Fällen infolge der üblichen Bemessungsweise nach den Bestimmungen des deutschen Ausschusses für Stahlbeton (A § 27) durch den Einfluß des Kriechens zusätzliche Momentenbelastungen des Betons und damit zusätzliche Betonbiegespannungen entstehen können, d. h., in welchen Fällen  $v\varrho$  kleiner als 1 sein kann. Offensichtlich ist dies von den verwendeten Beton- und Stahlgüten sowie vom Schlankheitsgrad des Systems abhängig. Zunächst läßt sich  $v$  in der Form



$$\nu = \frac{\lambda_1^2 E_b J_i}{P l^2} = \frac{\pi^2 E_b J_i}{P \left[ \frac{\pi}{\lambda_1} l \right]^2} = \frac{\pi^2 E_b J_b / (1 - \varrho)}{P l_r^2} = \frac{\pi^2 E_b F_b}{P (1 - \varrho) s_r^2}$$

darstellen, wobei  $l_r = l (\pi/\lambda_1)$  die Knicklänge hinsichtlich eines Ausknickens in der Biegeebene und  $s_r = l_r/i_b = l_r/\sqrt{F_b/J_b}$  den Schlankheitsgrad bei alleiniger Berücksichtigung des Betonquerschnittes bedeuten (vgl. a. A § 27, 2c). Für  $P$  hat man demgegenüber nach A § 27, 2b

$$P \leq \frac{1}{3 \omega} F_b (K_b + \mu \sigma_s), \quad \mu = F_e/F_b,$$

so daß man insgesamt

$$\nu \geq 3 \pi^2 \frac{E_b}{(1 - \varrho) (K_b + \sigma_s \mu)} \frac{\omega}{s_r^2}$$

erhält. Demnach wird mit  $\varrho/(1 - \varrho) = n \bar{J}_e/\bar{J}_b$  schließlich

$$\nu \varrho \geq \frac{3 \pi^2 E_e}{K_b + \sigma_s \mu} \frac{\bar{J}_e}{\bar{J}_b} \frac{\omega}{s_r^2}.$$

Hierbei ist  $\omega$  der, der maßgebenden Schlankheit  $s_{r \min}$  zugehörige Knickbeiwert.  $s_{r \min}$  braucht hierbei nicht gleich  $s_r$  zu sein, wenn z. B. der Knicksicherheitsnachweis in der durch die Querbewehrung charakterisierten Durchbiegungsrichtung nicht maßgebend ist. In diesem Falle wird  $\omega(s_{r \min}) > \omega(s_r)$ , so daß wir zu einer unteren Abschätzung von  $\nu \varrho$  gelangen, indem wir  $\omega(s_{r \min}) = \omega(s_r)$  setzen. Wegen  $\omega(s_{r \min}) > \omega(s_r)$  ist also dann erst recht

$$\nu \varrho \geq \frac{3 \pi^2 E_e}{K_b + \sigma_s \mu} \frac{\bar{J}_e}{\bar{J}_b} \frac{\omega(s_r)}{s_r^2}. \quad (43a)$$

Ist hingegen die Durchbiegungsrichtung aus der Querbewehrung auch gleichzeitig die maßgebende Richtung hinsichtlich des Knicksicherheitsnachweises (was jedoch in praktischen Fällen fast immer vermieden werden wird), so ist genau  $\omega(s_{r \min}) = \omega(s_r)$ , so daß (43a) für die untere Abschätzung von  $(\nu \varrho)$  in jedem Falle gilt.

Eine weitere Reduktion von (43a) ist nun nur noch für spezielle Querschnittsformen möglich. Für einen Rechteckquerschnitt sind

$$\bar{J}_b = b d^3/12, \quad \bar{J}_e = 2 (\varepsilon d)^2 (F_e/2) = \varepsilon^2 d^2 F_e,$$

wobei  $b$  bzw.  $d$  Breite bzw. Höhe des Querschnitts und  $\varepsilon d$  der Abstand der (symmetrisch angeordneten) Bewehrung [Gesamtquerschnitt  $2 (F_e/2) = F_e$ ] von der gemeinsamen Schwerachse sind. Man erhält aus (43a)

$$(\nu \varrho) \geq 36 \pi^2 \frac{E_e \varepsilon^2 \mu}{K_b + \sigma_s \mu} \frac{\omega(s_r)}{s_r^2}. \quad (43b)$$

Nun ist  $\mu/(K_b + \sigma_s \mu)$  eine von Null auf  $1/\sigma_s$  monoton anwachsende Funktion von  $\mu$ , so daß ihr Minimalwert für die nach A § 27, 2d vorgeschriebene Minimalbewehrung von 0,4% am schwächer belasteten Rande, also für eine (symmetrisch angeordnete) Gesamt-Minimalbewehrung von 0,8% entsteht. Mit  $\mu = 0,008$  und dem gebräuchlichen Wert  $\varepsilon = 0,4$  hat man also aus (43b)

$$\nu \varrho \geq 0,454 \frac{E_e}{K_b + 0,008 \sigma_s} \frac{\omega(s_r)}{s_r^2} = \vartheta. \quad (43c)$$

In Tabelle 1 sind mit  $E_e = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$  die der Gleichung (43c) entsprechenden Werte  $\vartheta$  in Abhängigkeit der Schlankheit  $s_r$  und der verwendeten Beton- und Stahl-



Dann werden

$$\sigma_{b0} = \frac{P}{F_i} + \frac{M_0}{W_{i,b}} = 47,1 + 61,5 = 108,6 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Druck)} < 110,$$

$$\sigma_{bu} = -\frac{P}{F_i} + \frac{M_0}{W_{i,b}} = -47,1 + 61,5 = 14,4 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Zug)} < \frac{108,6}{4} = 27,15 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_{e0} = n \frac{P}{F_i} + \frac{M_0}{W_{e,i}} = 706 + 702 = 1408 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Druck)} > 2000,$$

$$\sigma_{eu} = n \frac{P}{F_i} - \frac{M_0}{W_{e,e}} = 706 - 702 = 4 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Druck)}.$$

Der Querschnitt ist also nach A § 27 hinreichend.

Wir berechnen nun die Spannungen nach der genauen Theorie, wobei wir  $E_b = 340000 \text{ kg/cm}^2$  setzen. Man erhält

$$\nu = \frac{\pi^2 E_b J_i}{P l^2} = 7,15; \nu \varrho = \frac{\pi^2 E_b J_i}{P l^2} \varrho = \frac{\pi^2 E_e \bar{J}_e}{P l^2} = \frac{\pi^2 E_e \varepsilon^2 d^2 F_e}{P l^2} = 0,512 (< 1!)$$

und aus (41a, b) mit  $\varphi_n = 4$ ,  $e_k(\xi) = \sin k\pi\xi$  und  $\hat{M} = M_0 \sin \pi\xi$  sowie

$$M_0^* = \hat{M} \frac{\nu}{\nu - 1}$$

$$M_e^* = \frac{\nu \varrho}{\nu - 1} \left[ 1 + \frac{\nu(1-\varrho)}{\nu \varrho - 1} \left( 1 - e^{-\frac{\nu \varrho - 1}{\nu - 1} \varphi_n} \right) \right] \hat{M}, \quad M_b^* = \frac{\nu(1-\varrho)}{\nu - 1} \hat{M} e^{-\frac{\nu \varrho - 1}{\nu - 1} \varphi_n}$$

also

$$\max M_e^* = 0,505 M_0, \quad \max M_b^* = 1,496 M_0$$

so daß sich mit  $W_b = bd^2/6 = 3475 \text{ cm}^3$  und  $W_e = \varepsilon \cdot d \cdot F_e = 64,5 \text{ cm}^3$  ( $M_0 = 2,6 \text{ mt}$ ) die Biegespannungen

$$\text{extr } \sigma_e^{*(M)} = 2,035 \text{ t/cm}^2, \quad \text{extr } \sigma_b^{*(h)} = 112 \text{ kg/cm}^2$$

ergeben. Die Normalspannungen aus der Längskraftbelastung folgen aus (41c, d) mit  $\varphi_n = 4$

a) ohne Schwinden<sup>1</sup>

$$\sigma_b^{(N)} = \frac{P}{F_i} e^{-\frac{n F_e}{F_i} \varphi_n} = 41,5 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Druck)}, \quad \sigma_e^{(N)} = \frac{P}{F_e} \left[ 1 - \frac{F_b}{F_i} e^{-\frac{n F_e}{F_i} \varphi_n} \right] = 1,384 \text{ t/cm}^2 \text{ (Druck)}$$

b) allein infolge Schwinden ( $\varepsilon_s = 1,8 \cdot 10^{-4}$ )

$$\sigma_b^{(s)} = \frac{\varepsilon_s E_b}{\varphi_n} \left( 1 - e^{-\frac{n F_e}{F_i} \varphi_n} \right) = 2,7 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Zug)}, \quad \sigma_e^{(s)} = \frac{\sigma_b^{(s)}}{\mu} = 0,328 \text{ t/cm}^2 \text{ (Druck)}.$$

Der Spannungszustand zu Beginn ( $\varphi = 0$ ) ist durch die Schnittlasten

$$\max M_0^* = M_0 \frac{\nu}{\nu - 1}, \quad N = P$$

<sup>1</sup> Hierbei wurde  $n = E_e/E_b = 2,1/0,34 = 6,18$  gesetzt



gekennzeichnet, so daß die Spannungen<sup>1</sup> zur „Zeit“  $\varphi = 0$

$$\text{extr } \sigma_{b0}^{*(M)} = \frac{\max M_0^*}{W_{b,i}} = 79,8 \text{ kg/cm}^2, \quad \text{extr } \sigma_{e0}^{*(M)} = \frac{\max M_0^*}{W_{e,i}} = 0,376 \text{ t/cm}^2$$

$$\sigma_b^{(N)} = \frac{P}{F_i} = 50,25 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_e^{(N)} = n \sigma_b^{(N)} = 0,31 \text{ t/cm}^2$$

sind. In Tabelle 2 sind die Spannungswerte noch einmal zusammengestellt. Man erkennt, daß die tatsächlichen Spannungen z. T. weit über den zulässigen liegen, obwohl der Spannungsnachweis nach den Bestimmungen hinreichte. Die größten Stahlruckspannungen liegen nahe an der Quetschgrenze und die größten Betondruckspannungen sind um ca. 40 % größer als die zulässigen. Wesentlicher als die Spannungserhöhungen im Druckbereich, die ohne Zerstörung des Materials getragen werden können, scheint das Anwachsen der Betonzugspannungen von 14,4 kg/cm<sup>2</sup> auf 73,2 kg/cm<sup>2</sup>, was sicherlich ein Reißen der Zugzone und damit eine Verringerung der Stabsteifigkeit zur Folge hat, was wiederum die Durchsenkungen und damit auch die Zusatzmomente  $M_1^*$  vergrößert, so daß die tatsächlichen Gesamtspannungen noch höher liegen werden. Darüber hinaus ist zu bemerken, daß Schwankungen des Betonmoduls nach unten schon sehr schnell sämtliche Spannungen über jedes zulässige Maß steigern können. So ergeben sich beispielsweise bereits mit  $E_b = 3 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$  (nach DIN 4227) die schon wesentlich größeren Spannungswerte in der letzten Spalte der Tabelle 2.

Wir wollen nun dieselbe Belastung mittels eines Querschnitts abtragen, bei dem  $\nu \varrho > 1$  ist. Dies erreichen wir am besten, ohne den Stahlquerschnitt besonders stark vergrößern zu müssen, durch Verwendung eines höheren Querschnitts (Abb. 15). Wählen wir einen Rechteckquerschnitt 27,5/35 mit  $F_b = 963 \text{ cm}^2$ , so müssen wir, um der Forderung nach Minimalbewehrung zu genügen, 4  $\varnothing 16$  mit  $F_e = 4 \cdot 2,01 = 8,04 \text{ cm}^2$  einlegen, womit wieder  $\mu = F_e/F_b = 0,835 \% > 0,8 \%$  ist. Mit  $F_i = F_b (1 + n \mu) = 1085 \text{ cm}^2$ ,  $J_i = J_b (1 + 12 \varepsilon^2 n \mu) = 122400 \text{ cm}^4$  ( $n = 15$ ),

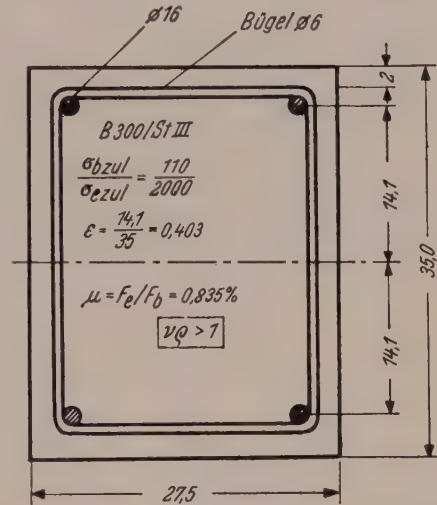


Abb. 15.

$$W_{i,b} = J_i/(d/2) = 7000 \text{ cm}^3 \text{ und } W_{i,e} = J_i/n \varepsilon d = 579 \text{ cm}^3$$

ergeben sich dann im Sinne von A § 27 für die Spannungen

$$\sigma_{b0} = 36,9 + 37,2 = 74,1 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Druck)}$$

$$\sigma_{bn} = -36,9 + 37,2 = 0,3 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Zug)}$$

$$\sigma_{e0} = 553 + 449 = 1002 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Druck)}$$

$$\sigma_{en} = 553 - 449 = 104 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Druck)}.$$

Für die genaue Berechnung bestimmen wir zunächst den Kennwert  $\nu \varrho$ , der im vorliegenden Falle

$$\nu \varrho = \frac{\pi^2 E_e \varepsilon^2 d^2 F_e}{P l^2} = 1,215 > 1$$



ist. Mit  $E_b = 3,4 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$  erhalten wir weiterhin

$$\nu = \frac{\pi^2 E_b J_i}{P l^2} = 13,37, \varrho = 0,0908$$

und damit aus (42a, b) mit  $\varphi_n = 4$  die Zusatzmomente  $\max M_{e1}^* = 0,373 M_0$ ,  $\max M_{b1}^* = -0,066 M_0$ , (Entlastung!) denen mit  $W_b = b d^2/6 = 5620 \text{ cm}^3$  und  $W_e = \varepsilon \cdot d \cdot F_e = 113,3 \text{ cm}^3$  die Biege-Zusatzspannungen

$$\text{extr } \sigma_{e1}^{*(M)} = 856 \text{ kg/cm}^2, \text{ extr } \sigma_{b1}^{*(M)} = -3,1 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Entlastung!)}$$

entsprechen. Zur Zeit  $t = 0$  erhalten wir auf Grund des (elastischen) Verformungsmomentes  $M_0^* = M_0 \nu/(\nu - 1)$  die Biegespannungen

$$\text{extr } \sigma_{e0}^{*(M)} = \frac{\nu \varrho}{\nu - 1} \frac{M_0}{W_e} = 225 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{extr } \sigma_{b0}^{*(M)} = \frac{\nu (1 - \varrho)}{\nu - 1} \frac{M_0}{W_b} = 45,4 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Normalspannungen aus der Längskraftbelastung sind

a) zur Zeit  $t = 0$  mit  $F_i = F_b (1 + n \mu) = 1013 \text{ cm}^2$  ( $n = 6,18$ )

$$\sigma_{e0}^{(N)} = n \frac{P}{F_i} = 244 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Druck)}, \quad \sigma_{b0}^{(N)} = \frac{P}{F_i} = 39,5 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Druck)},$$

b) zur „Zeit“  $\varphi_n = 4$  (ohne Schwinden)

$$\sigma_e^{(N)} = \frac{P}{F_e} \left[ 1 - \frac{F_b}{F_i} e^{-\frac{n F_e}{F_i} \varphi_n} \right] = 1084 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Druck)},$$

$$\sigma_b^{(N)} = \sigma_{b0}^{(N)} e^{-\frac{n F_e}{F_i} \varphi_n} = 32,4 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Druck)}$$

und c) zur „Zeit“  $\varphi_n = 4$  allein infolge des Schwindens ( $\varepsilon_s = 1,8 \cdot 10^{-4}$ )

$$\sigma_b^{(s)} = 2,85 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Zug)}, \quad \sigma_e^{(s)} = 341 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Druck)}.$$

Damit erhalten wir insgesamt die in Tabelle 3 eingetragenen Spannungen. Man erkennt insbesondere im Vergleich der dritten und vierten Spalte, daß sich, abgesehen vom Schwinden, die Betondruckspannungen gegenüber den genauen Spannungswerten zur Zeit  $t = 0$  verringern. Die Erhöhung der Betonzugspannungen ist dabei allein durch die Umlagerung der Axiallast bedingt ( $39,5 - 32,4 = 7,1 \text{ kg/cm}^2$ ) und wird von der (Zugspannungs-) Entlastung ( $-3,1 \text{ kg/cm}^2$ ) auf Grund der Betonmoment-Ermässigung sogar z. T. aufgehoben (resultierender Zugspannungszuwachs  $= 7,1 - 3,1 = 4 \text{ kg/cm}^2$ ). Hier wird also praktisch ein weiteres Aufreißen und damit eine Steifigkeitsverminderung vermieden. Auch die Stahlspannungserhöhungen im Druckbereich können ohne weiteres getragen werden.

Da wir an Hand der Konvergenzbetrachtungen an den Reihenentwicklungen der behandelten Beispiele erkannt haben, daß die Zusatzmomente im wesentlichen mit

dem jeweils ersten Gliede der, die Zusatzlösungen darstellenden Reihenentwicklungen identisch sind, gilt die Empfehlung,  $\nu \varrho > 1$  zu machen, auch für andere anfängliche Momentbelastungszustände, die nicht einer Eigenfunktion des Problems entsprechen.

## VI. Zusammenfassung

Bei der Untersuchung des Problems der außermittigen Biegung unter Berücksichtigung der zeitabhängigen Betondeformationen wird man auf eine partielle Integro-Differentialgleichung geführt, die man für die technisch wichtigsten Fälle exakt durch gut konvergierende Reihen von Produktformen lösen kann. Für die Praxis ergibt sich für den Spezialfall des symmetrisch bewehrten Querschnitts die Empfehlung, neben den Bemessungsvorschriften nach den Stahlbetonbestimmungen darauf zu achten, daß bei Wahl eines Querschnitts der Kennwert  $\nu \varrho$  stets größer als 1 zu machen ist. In diesem Falle hat man die Gewähr, daß die zeitabhängigen Vorgänge, abgesehen von den Axiallast-Umlagerungen und dem Schwinden, keine weitere Belastung des Betonquerschnitts und damit auch keine Betonzugspannungssteigerungen hervorrufen, so daß eine weitere Verminderung der Steifigkeit (durch Aufreißen) praktisch nicht entsteht. Auch die Stahlspannungszuwächse bleiben im allgemeinen in vertretbaren Grenzen.

Eine entsprechende explizite Untersuchung für unsymmetrisch oder einseitig bewehrte Querschnitte, von denen letztere meiner Ansicht nach besonders gefährdet sind, ist an Hand der erarbeiteten Ergebnisse ebenfalls, allerdings nur noch mit konkreten Zahlenwerten möglich, so daß hierfür keine entsprechend einfache allgemeine Empfehlung ausgesprochen werden konnte. Unter Umständen ist ein solches Ziel unter Heranziehung von Näherungslösungen für die Integro-Differentialgleichungen nach der Methode Sattler (Betrachtung der Endverformungen unter Benutzung angenommener Zeitabhängigkeiten) erreichbar.

Tabelle 1

Schlankheit $s_r$ ( $h_k/d$ )		50 (15)	70 (20)	85 (25)	105 (30)	120 (35)	140 (40)
Material							
B 120	Stahl I	3,01	1,66	1,38	1,17	1,19	1,15
B 160	Stahl I	2,35	1,30	1,07	0,91	0,93	0,90
	Stahl II	2,22	1,22	1,01	0,86	0,88	0,85
B 225	Stahl I	1,79	0,99	0,82	0,70	0,71	0,68
	Stahl II	1,71	0,94	0,78	0,66	0,67	0,65
	Stahl III und IV	1,67	0,92	0,76	0,65	0,66	0,64
B 300	Stahl I	1,48	0,81	0,68	0,57	0,58	0,56
	Stahl II	1,43	0,79	0,65	0,56	0,56	0,55
	Stahl III und IV	1,40	0,77	0,64	0,55	0,55	0,54

$$\varepsilon = 0,4$$



Tabelle 2

Spannungen (kg/cm <sup>2</sup> )	Nach A § 27 ( $n = 15$ )	Nach ge- nauer Theo- rie z. Zt. $t = 0$ ( $n = 6,18$ )	Nach ge- nauer Theo- rie z. „Zt.“ $\varphi = 4$ ohne Schw.	Schwinden	Gesamtsp. für $E_b =$ $= 3,4 \cdot 10^5$ $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$	Gesamtsp. für $E_b =$ $= 3 \cdot 10^5$ (kg/cm <sup>2</sup> )
extr. $\sigma_b$ (Druck)	108,6	130,1	153,5	— 2,7	150,8	163,1
extr. $\sigma_b$ (Zug)	14,4	29,5	70,5	2,7	73,2	81,9
extr. $\sigma_s$ (Druck)	1408	686	3419	328	3747	4645
extr. $\sigma_s$ (Zug)	— 4	66	651	— 328	323	1015

Tabelle 3

Spannungen (kg/cm <sup>2</sup> )	Nach A § 27 ( $n = 15$ )	Nach genauer Theorie z. Zt. $t = 0$ ( $n = 6,18$ )	Nach genauer Theorie z. „Zt.“ $\varphi = 4$ o. Schw. ( $n = 6,18$ )	Schwinden	Gesamtsp. für $E_b = 3,4 \cdot 10^5$ $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ ( $n = 6,18$ )
extr. $\sigma_b$ (Druck)	74,1	84,9	74,7	— 2,85	71,85
extr. $\sigma_b$ (Zug)	0,3	5,9	9,9	2,85	12,75
extr. $\sigma_s$ (Druck)	1002	469	2165	341	2506
extr. $\sigma_s$ (Zug)	— 104	— 19	— 3	— 341	— 344

(Eingelangt am 7. April 1960)



<b>R. Schindler</b> , Die Berechnung von Trägerrosten mit Hilfe der Matrizenrechnung. (Mit 3 Textabbildungen) .....	175
<b>F. Selig und E. J. Couch</b> , Unterirdische Verbrennung als Ölförderungsmethode. (Mit 7 Textabbildungen) .....	199
<b>L. Stablini</b> , Contributo allo studio dei sistemi elasto-plastici. (Con 1 Figura) .....	214
<b>E. Tremmel</b> , Beitrag zum Problem des unrunder Rohres. (Mit 6 Textabbildungen) ....	222
<b>R. Trostel</b> , Biegung mit Längskraft in Stahlbetonbalken bei Berücksichtigung des Kriechens. (Mit 15 Textabbildungen) .....	236

## S P R I N G E R - V E R L A G I N W I E N

**Kernreakthortheorie.** Eine Einführung. Von **S. Glasstone**, United States Atomic Energy Commission und **M. C. Edlund**, Oak Ridge National Laboratory. Ins Deutsche übersetzt und bearbeitet von **Dr. W. Glaser**, weiland o. Professor an der Technischen Hochschule Wien und **Dr. H. Grumm**, Reaktor-Interessengemeinschaft, Reaktorabteilung der SGP, Wien. Mit 82 Textabbildungen. X, 341 Seiten. Gr.-8°. 1961.

Ganzleinen S 239.—, DM 38.—, sfr. 40.90, \$ 9.50

**Schwankungserscheinungen in Elektronenröhren.** Von Dipl.-Ing. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. **Franz Ollendorff**, Research Professor am Technion, Israel Institute of Technology, Haifa, Fellow of the I. R. E. (America), Member of the I. E. E. (England), Mitglied der Israelischen Akademie der Wissenschaften. Mit 144 Textabbildungen. XVI, 468 Seiten. Gr.-8°. 1961. (Technische Elektrodynamik, Band II: Innere Elektronik, Teil 3.)

Ganzleinen S 576.—, DM 96.—, sfr. 98.30, \$ 22.85

**Chemisch-physikalische Grundlagen der Verwendung von Erdöl und seinen Produkten.** Von **Dr. A. Philippovich**, Privatdozent an der Technischen Hochschule Wien, Member of the Institute of Petroleum, London. Mit 116 Textabbildungen. XII, 333 Seiten. Gr.-8°. 1960.

Ganzleinen S 444.—, DM 74.—, sfr. 75.80, \$ 17.60

**Ortsfeste Dieselmotoren und Schiffsdieselmotoren.** Von Dipl.-Ing. **Fritz Mayr**, Oberingenieur der Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg A. G., Werk Augsburg. Dritte, völlig neubearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 417 Textabbildungen. VIII, 471 Seiten. 4°. 1960. (Die Verbrennungskraftmaschine, Band XII.)

Steif geheftet S 792.—, DM 132.—, sfr. 135.20, \$ 31.40

Ganzleinen S 816.—, DM 136.—, sfr. 139.30, \$ 32.35

**Der praktische Einsatz elektronischer Rechenautomaten.** Einführung in die Programmierung und den betriebswirtschaftlichen Einsatz elektronischer Rechenautomaten. Von **Ernst P. Billeter**, Leiter des Institutes für Automation und Professor für Statistik und Automation an der Universität Freiburg (Schweiz). Mit 2 Textabbildungen und 40 Diagrammen. VI, 151 Seiten. Gr.-8°. 1961.

Steif geheftet S 132.—, DM 22.—, sfr. 22.50, \$ 5.25

**Integraltafel.** Herausgegeben von **Wolfgang Gröbner**, o. Professor an der Universität Innsbruck und **Nikolaus Hofreiter**, o. Professor an der Universität Wien. Erster Teil: Unbestimmte Integrale. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 2 Textabbildungen. VIII, 166 Seiten. 4°. 1961.

Steif geheftet S 136.—, DM 22.70, sfr. 23.20, \$ 5.40

Zweiter Teil: Bestimmte Integrale. Zweite, verbesserte Auflage. VI, 204 Seiten. 4°. 1958.

Steif geheftet S 162.—, DM 27.—, sfr. 27.60, \$ 6.45

**Blätter für Technikgeschichte.** Herausgegeben vom Technischen Museum für Industrie und Gewerbe in Wien, Forschungsinstitut für Technikgeschichte. Schriftleitung: **Dr. phil. J. Nagler**, Wien. 22. Heft: Mit 74 Abbildungen. V, 241 Seiten. Beigedrukt: Direktor Ing. Alois Nedoluha, Geschichte der Werkzeuge und Werkzeugmaschinen (I. Teil). Mit 32 Abbildungen. I, 36 Seiten. Gr.-8°. 1960.

S 100.—, DM 15.90, sfr. 17.10, \$ 4.—

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung



**Einführung in die Statik.** Von Dr. phil. Dr. techn. **Fritz Chmelka**, a. o. Professor, Technische Hochschule in Wien, und Dipl.-Ing. Dr. techn. **Ernst Melan**, o. Professor an der Technischen Hochschule in Wien, wirkl. Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften. Siebente, verbesserte Auflage. Mit 161 Textabbildungen. VII, 210 Seiten. Gr.-8°. 1961. Steif geheftet S 114.—, DM 19.—, sfr. 19.50, \$ 4.50

**Einführung in die Festigkeitslehre für Studierende des Bauwesens.** Von Dr. phil. Dr. techn. **Fritz Chmelka**, a. o. Professor an der Technischen Hochschule in Wien, und Dipl.-Ing. Dr. techn. **Ernst Melan**, o. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. Vierte, umgearbeitete und ergänzte Auflage. Mit 240 Textabbildungen. VIII, 369 Seiten. Gr.-8°. 1960. Steif geheftet S 192.—, DM 32.—, sfr. 32.80, \$ 7.60

**Einführung in die Baustatik.** Von Dipl.-Ing. Dr. techn. **Ernst Melan**, o. Professor an der Technischen Hochschule in Wien, wirkl. Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften. Mit 242 Textabbildungen. X, 328 Seiten. Gr.-8°. 1950. Halbleinen S 186.—, DM 31.50, sfr. 32.50, \$ 7.50

**Lehrbuch des Stahlbetonbaues.** Grundlagen und Anwendungen im Hoch- und Brückenbau. Von Dipl.-Ing. Professor Dr. techn. **Adolf Pucher**, Graz. Dritte, verbesserte und erweiterte Auflage. Mit 324 Textabbildungen. XII, 337 Seiten. Gr.-8°. 1961. Ganzleinen S 277.—, DM 44.—, sfr. 47.30, \$ 11.—

**Einflußfelder elastischer Platten.** Von Dipl.-Ing. Prof. Dr. techn. **Adolf Pucher**, Graz. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 10 Textabbildungen und 81 Tafeln. VIII, 15 Seiten Text. Querformat 4°. 1958. Ganzleinen S 210.—, DM 35.—, sfr. 35.80, \$ 8.35

**Konstruktive Geometrie in der Technik.** Von Dr. **Fritz Hohenberg**, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Graz. Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 459 Textabbildungen. IX, 319 Seiten. Gr.-8°. 1961. Steif geheftet S 150.—, DM 25.—, sfr. 25.60, \$ 5.95 Ganzleinen S 174.—, DM 29.—, sfr. 29.70, \$ 6.90

**Flächentragwerke.** Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke. Von Dipl.-Ing. Dr. h. c. Dr. techn. **Karl Girkmann**, em. ord. Professor an der Technischen Hochschule in Wien, wirkl. Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften. Fünfte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 318 Textabbildungen. XXXI, 632 Seiten. Gr.-8°. 1959. Ganzleinen S 432.—, DM 72.—, sfr. 73.70, \$ 17.15

**Elementare Baustatik für Studium und Praxis.** Von Dr.-Ing. habil. **Richard Guldán**, o. Professor an der Technischen Hochschule in Hannover. Mit 540 Textabbildungen, 6 Tafeln und 44 Zahlenbeispielen. XVI, 295 Seiten. Gr.-8°. 1956. Ganzleinen S 234.—, DM 39.—, sfr. 39.90, \$ 9.30

**Die Cross-Methode und ihre praktische Anwendung.** Von Dr.-Ing. habil. **Richard Guldán**, o. Professor an der Technischen Hochschule Hannover. Mit 800 Textabbildungen, 75 Tafeln und 46 Zahlenbeispielen. XIX, 472 Seiten. Gr.-8°. 1955. Ganzleinen S 432.—, DM 72.—, sfr. 73.70, \$ 17.15

**Rahmentragwerke und Durchlaufträger.** Von Dr.-Ing. habil. **Richard Guldán**, weiland o. Professor an der Technischen Hochschule Hannover. Sechste, erweiterte Auflage. Aus dem Nachlaß des Verfassers herausgegeben und bearbeitet von Dr.-Ing. **Horst Reimann**, wissenschaftlicher Assistent an der Technischen Hochschule Hannover. Mit 679 Textabbildungen, 96 Tafeln und 34 Zahlenbeispielen. XXIII, 501 Seiten. Gr.-8°. 1959. Ganzleinen S 504.—, DM 84.—, sfr. 86.—, \$ 20.—